This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

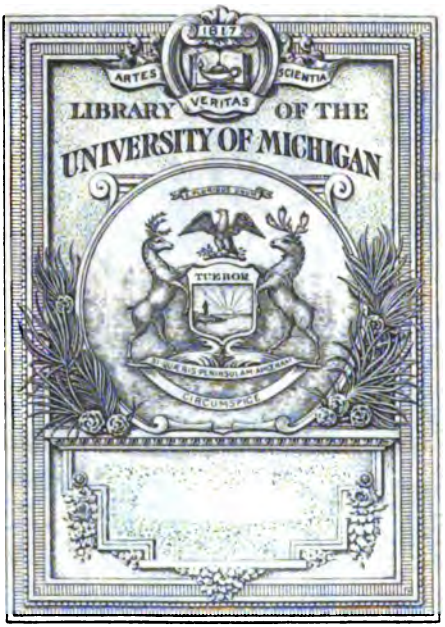
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

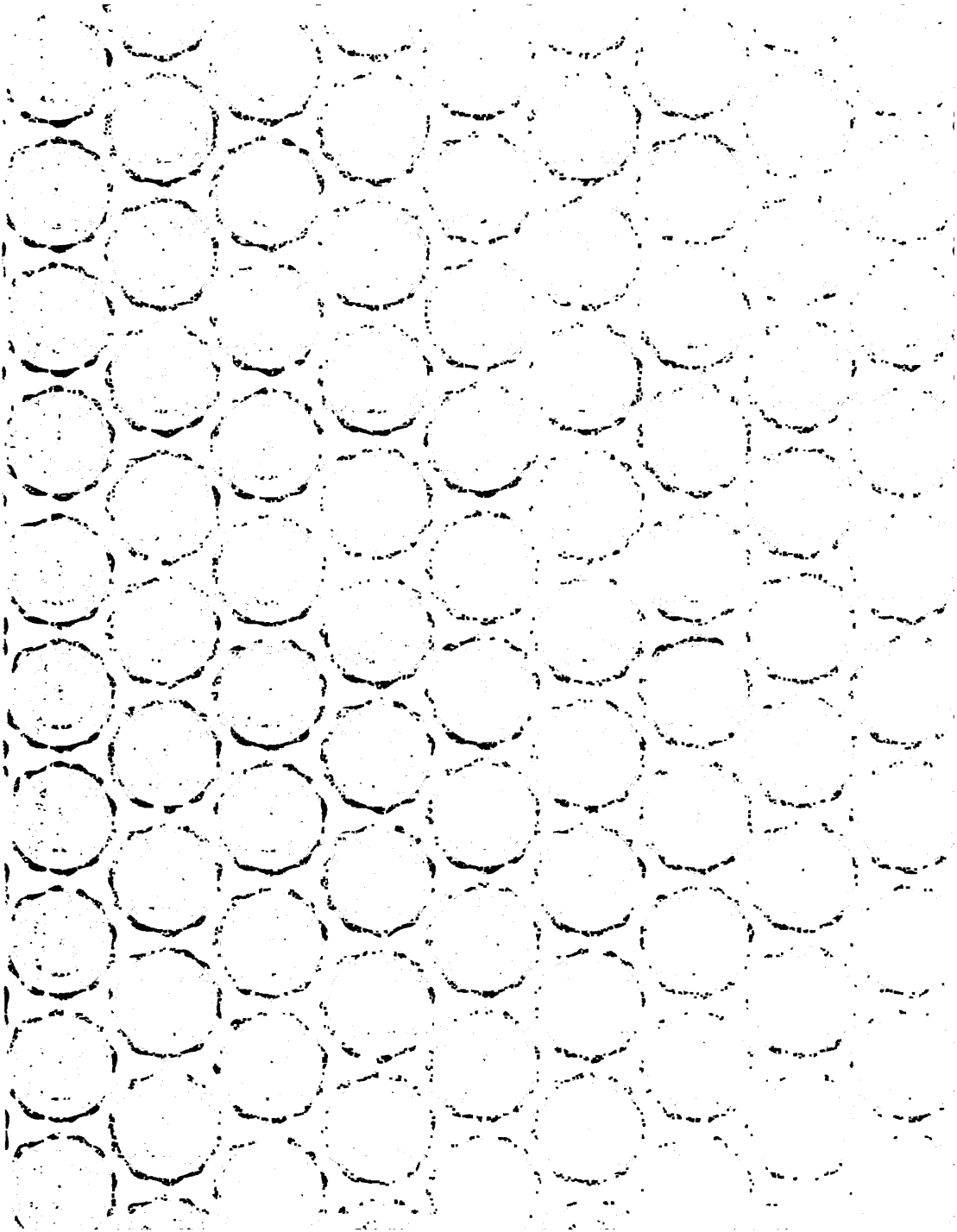
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



QA
31
.F89
F534

SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QA
31
E59
P534

QUORUM

PARTEM PRIMAM

P. R Æ S I D E

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCC.

PUBLICE DEFENDET

IOANNES FRIDERICUS WEIHENMAIER,

Steinenbronnenſis,

CANDIDATUS MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.

Lib. Com.
Maglione
2-18-28
16615

DEFINITIO IV.

§. 1.

Υψος εστι παντος χηματος η απο της κορυφης επι την βασιν καθετος αγομενη. (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τα Σωζομενα. *Ex recenſione* Dav. GREGORII. Oxon. 1703.)

Cum in parallelogramma, parallelepipeda, prismata, cylindros, quorum altitudines in *Elementis* (VI, 1. XI, 29—32. 34. 40. XII, 10. 11. 14. 15.) commemorantur, definitio hæc non quadret; genuina haud eſſe videtur. Deeſt etiam in verſione CAMPANI. (*Euclidis Elementorum Libri XV. cum expoſitione Theonis in priores XIII. a Barthol. Zamberto Latinitate donata, Campani in omnes.* Baſil. 1558. p. 137.) Neque ejus rationem habet PROCLUS. (Vid. §. 8.)

§. 2.

Accuratius certe definitionem altitudinis ſegmentorum curvilineorum, quam Propoſitioni 18. *Libri de quadratura parabolæ* præmittit, ARCHIMEDES informat: Των τμαματων περιεχομενων υπο τε ευθειας και καμπυλας γραμμας βασιν μεν καλω την ευθειαν· υψος δε την μεγιςην καθετον απο της καμπυλας γραμμας αγομενην επι την βασιν τε τμαματος· κορυφην δε το σημειον, αφ' ᾧ α μεγιςα καθετος αγεται. Cui conformiter in Propos. 18. infert: "Si in ſegmento, quod ſub recta linea" & rectanguli coni ſectione" (arcu parabolæ) "continetur, a media" baſi recta ducatur diametro parallela; verticem ſegmenti eſſe punctum" illud, in quo, quæ diametro parallela ducitur, coni ſectionem ſecat:" quoniam, quæ ſectionem coni in hoc puncto contingit, parallela ſit baſi; normalium igitur, quæ a ſectione coni ad baſin ducuntur, maxima ſit, quæ ab illo puncto ducitur. (ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ τα Σωζομενα. *Ex recenſione Jos.* TORELLI. Oxon. 1792. p. 30.)

N.n.S.

§. 3.

ARCHIMEDIS hæc argumentatio, præter notionem curvæ concavæ & rectæ eam contingentis, nititur propositionum I, 28. 34. Corollario: quod perpendicula, ab rectæ alicujus punctis in aliam ipsi parallelam demissa, invicem æqualia; ipsis proinde minora sint, quæ in hanc ab punctis infra illam sitis cadunt.

Ob eandem rationem, quæ in triangulo ab vertice anguli, qui opponitur basi (lateri, cui triangulum insistere concipitur), ad rectam, in qua basis jacet, ducitur normalis, major est alio quovis perpendiculo ab trianguli cruribus super eandem rectam ducto; & quæcunque in parallelogrammo ab latere, quod opponitur basi (lateri, cui parallelogrammum insistere concipitur), ipso, vel producto, ad rectam, in qua basis jacet, ducitur normalis, major est alio quovis perpendiculo ab parallelogrammi cruribus (reliquis duobus lateribus) in eandem demisso: quare illa trianguli, hæ parallelogrammi altitudines; angulique basi oppositi vertex etiam trianguli vertex dicuntur.

PROPOSITIO I.

§. 4.

Demonstratio partis prioris, præter ipsam propositionem I, 38. supponit consectarium, facile ex ea ope propos. 3. & axiom. 9. Lib. I. deducendum: quod triangula easdem inter parallelas, sed super inæqualibus constituta basibus inæqualia sint; nominatim, quod illud majus sit, cujus basis est major.

§. 5.

Enunciatum propositionis: Τα τριγωνα και τα παραλληλογραμμα τα υπο το αυτο υψος οντα, stricte (quod & in expositione subjuncta fit) acceptum, supponit triangula circa eundem verticem, & (applicationis causa partis prioris ad demonstrandam alteram) parallelogramma, quorum latera basibus opposita contigua sint; utraque super basibus in directum jacentibus constituta.

Præ-

Præterea expositionis enunciatum: Εστω τριγωνα μεν τα ΑΒΓ, ΑΓΔ (*Fig.* 1.), παραλληλογραμμα δε τα ΕΓ, ΓΖ, υπο το αυτο υψος οντα, την απο του Α επι την ΒΔ καθετον αγομενην· λεγω, οτι εστιν ως η ΒΓ βασις προς την ΓΔ βασιν, ουτως το ΑΒΓ τριγωνον προς το ΑΓΔ τριγωνον, και το ΕΓ παραλληλογραμμον προς το ΓΖ παραλληλογραμμον, supponit triangula & parallelogramma invicem contigua, eaque in schemate ad oppositas lateris communis ΑΓ partes delineata; qualia etiam sunt, ad quæ propositio in demonstrationibus VI, 2. 14. 15. 23. 25. applicatur.

§. 6.

Sive autem contiguæ sint figuræ earumque bases (& sive tunc ad diversas, sive ad easdem lateris communis partes jaceant); sive invicem sint disjunctæ; sive partim coincidant: propositio 1, 38. ipsiusque corollarium (§. 4.) ad triangula circa eundem verticem & super basibus in directum jacentibus constituta applicantur, ducta per verticem communem parallela rectæ, in qua jacent bases triangulorum; & cum hac parallela, quippe unica, quæ rectæ illi per hoc punctum agi potest (I, 29. Coroll.) coincidunt parallelogrammorum, circa eundem cum triangulis verticem & super iisdem pariter, ac triangula, basibus constitutorum, latera basibus opposita.

§. 7.

Porro demonstratio æque pertinet ad triangula & parallelogramma æqualium altitudinum: quibus ita dispositis, ut bases illorum sint in eadem recta linea, & figuræ ipsæ ad easdem hujus rectæ partes; recta per vertices triangulorum ducta ei, in qua bases sunt, fit parallela (I, 28. 33.); parallelogrammorum vero latera basibus opposita in eandem incidunt rectam ei, in qua bases sunt, parallelam (I, 28. 33. & 29. Coroll.).

Quare triangula etiam & parallelogramma æqualia sunt uti bases. (*Euclidis Elementor. Libri priores VI. item XI & XII. Subdatis iis, quibus olim Libri hi — vitiati sunt, & quibusdam Euclidis demonstrationibus restitutis a Rob.* Simson. Glasg. 1756. VI, 1. Coroll p. 176. *Auszug aus Rob. Simsons Ueberſezung der Elemente. Von* Matthias. Magdeb. 1799. S. 76.)

§. 8.

§. 8.

Extenſionem hanc propoſitioni VI, 1. immediate tribuunt PROCLUS & CLAVIUS: hic quidem in demonſtratione & figura adjuncta (*Euclidis Elementor. Libri XV. — perſpicuis demonſtrationibus accuratisque ſcholiis illuſtrati. Auctore Chriſtoph.* CLAVIO. Francof. 1607. T. I. p. 542. ſq.), ac præmiſſa (p. 541.) explicatione Definitionis 4; ille (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ *Στοιχειων* Βιβλ. ιε. *Εις τα αυτα το πρωτον Εξηγηματων* ΠΡΟΚΛΟΥ Βιβλ. δ. Baſil. 1533. Lib. IV. Ad I, 38. p. 105.) pronuncians: *Το αυτο υψος εδεν διαφερει η εν ταις αυταις ειναι παραλληλοις. Παντα γαρ τα εν ταις αυταις οντα παραλληλοις υπο το αυτο εϛι υψος, και αναπαλιν. Υψος γαρ εϛι η απο της ετερας παραλληλη καθετος επι την λοιπην.*

Et EUCLIDES ipſe in XI, 29—32. XII, 4. 5. 6. 11. énunciato: *υπο το αυτο υψος οντα*, indicat ſolida *ισουψη* (XI, 40.); atque in XII, 10. *υψος ισον* dicit, quod eſt *το αυτο*.

§. 9.

Propoſitum de parallelogrammis ejusdem altitudinis, vel æqualtis, immediate demonſtrari poſſe ope I, 36. eodem modo, quo aſſertum de triangulis ope I, 38. evincitur, ſponte patet; & ſic illud demonſtrat CAMPANUS (p. 138. ſq.).

§. 10.

Propoſitiones I, 35—38. theoremate VI, 1. comprehendi; ſed, cum hujus demonſtratio illis nitatur, non ſimul cum hoc una ſtabiliri demonſtratione dici poſſunt, quod PROCLUS (l. c.) contendit: *Δοκει δ εμοι των τεττταρων τυτων θεωρηματων — μιαν αποδειξιν εν τω εκτω Βιβλιω κατα το πρωτον θεωρημα περιεχεϑαι· λανθανειν τε τυς πολλυς τυτο ποιων. Οτ αν γαρ τυτο δεικνυη τα τριγωνα και τα παραλληλογραμμα, τα υπο το αυτο υψος, εχοντα προς αλληλα τον λογον, ον εχυσιν αι βασεις, εδεν αλλο η ταυτα παντα καϑολικωτερον αποδεικνυσιν εκ της αναλογιας. Το γαρ αυτο υψος εδεν διαφερει η εν ταις αυταις ειναι παραλληλοις — Εκει μεν ων δι αναλογιας δεδειχται, οτι ετως εχει τα τριγωνα και τα παραλληλογραμμα τα υπο το αυτο υψος, τυτ εϛι τα εν ταις αυταις κειμενα παραλληλοις, ως αι βασεις· και ισων ουσων τῶν βασεων ισα τα χωρια, και διπλασια διπλασιων, και αλλον λο-*

γον

γον εχουσων, τον αυτον εξει και τα χωρια λογον προς αλληλα. Εν ταυθα δε, ϐ γαρ ην αναλογια χρηθαι μηδεπω διδαξαντα περι αυτης, αρχειται τη ισοτητι μονη, και ταυτην εκ της ισοτητος η ταυτοτητος των βασεων συλλογιζεται. Εν ενι δ ϐν εκεινω τα τεττερα ταυτα θεωρηματα περιεχεται· ϐ μονον οτι δια μιας αποδειξεως δεικνυσιν, οτα εν τοις τετρασιν περιεχεται τυτοις, αλλ οτι και τελειοντι προστιθητιν την ταυτοτητα των λογων, καν αιτοι αι βασεις ωσι.

EUCLIDES quidem in demonſtrationibus XII, 7. 15. 14. æqualitatem pyramidum triangularium, cylindrorum, in eadem altitudine & ſuper æqualibus baſibus exiſtentium, ex propoſitionibus XII, 5. 11. ſubſumit; ſed harum demonſtrationes ex aliis fontibus, æqualitatem illam non ſupponentibus, repetit.

§. 11.

Parallelogramma & triangula rectangula, quæ unum latus circa angulum rectum commune, vel æquale habent, eſſe ut altera ipſorum latera circa angulum rectum, aſſerto generali VI, 1. & §. 7. continetur.

§. 12.

Hinc parallelogramma & triangula, primum rectangula, tum (I, 35. 37.) quælibet, ſuper eadem vel æqualibus baſibus conſtituta, ſunt uti altitudines: quod CLAVIUS (p. 544.) ſimili modo infert; COMMANDINUS (*Euclidis Elementor. Libri XV. cum ſcholiis antiquis. A Federico* COMMANDINO *in Latinum converſi, commentariisque quibusdam illuſtrati.* Piſauri 1572. fol. 72. b.) prolixius, nec legitime, deducit.

§. 13.

Propoſitum §. 11. ſequentia complectitur Lemmata, *Elementorum* Libro X. vulgo inſerta:

1°. Si ſint duæ rectæ lineæ; erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis continetur. (Lemma ante X, 23.)

2°. Si ſint duæ rectæ lineæ in ratione aliqua; erit ut major ad minorem,

norem, ita rectangulum ſub duabus contentum ad quadratum minoris. (Lemma ante X, 32.)

3°. Si fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua; erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum ſub prima & media ad id, quod ſub media & tertia continetur. (Lemma ante X, 33.)

4°. Si recta linea in inæquales ſecetur; erit ut major pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & majori parte ad rectangulum ſub tota & minori. (Lemma 2. ante X, 34.)

5°. Si ſint duæ rectæ inæquales; minor autem ipſarum in partes æquales ſecetur: rectangulum contentum ſub duabus illis rectis lineis duplum erit ejus, quod ſub majori & dimidia minoris continetur. (Lemma 3. ante X, 34.)

Quorum ſecundum non agnoſcere pleraque exemplaria; tertium, quartum & quintum deſiderari in ſuis Codd. MSS. notat *Dav.* GREGORIUS (p. 239. 240. 243.): nec poſteriora duo ab *Euclide* eſſe ſe arbitrari addit; quod veroſimiliter etiam de prioribus tribus eſt ſtatuendum.

§. 14.

Per deductionem ad impoſſibile, ſimilem ei, quæ demonſtrandis I, 39. 40. adhibetur, facile demonſtrantur propoſitionum VI, 1. & §. 7. 12. converſæ: nempe triangula & parallelogramma, quæ ſunt inter ſe uti baſes, æquales habere altitudines, vel eandem; &, quæ ſunt inter ſe ut altitudines, æquales habere baſes, ſi unam & eandem non habeant. (CLAVIUS p. 543. ſq.)

PROPOSITIO II.

§. 15.

Rectam uni laterum trianguli, intra vel extra illud, parallelam ſecare reliqua ejus latera, ipſa vel producta, nititur hoc propos. 29. & axiom. 11 Lib. I. corollario, ſæpius in ſequentibus ſuppoſito: quod recta ſecans unam duarum parallelarum ſecet & alteram; ſeu quod, ſi una duarum parallelarum tertiam quandam rectam ſecat, altera hanc pariter ſecet.

§. 16.

§. 16.

Priore propoſitionis VI, 2. parte demonſtratur: ductam uni BC laterum trianguli ABC parallelam DE (*Fig.* 2.) altera duo latera AB, AC ita ſecare, ut partes unius eandem mutuo habeant rationem, quam partes ſimiliter ſitæ alterius; h. e. ut ſit $BD : DA = CE : EA$; &, inverſe (V, 4. Cor.), vel immediate pariter $AD : DB = AE : EC$.

§. 17.

Componendo igitur (V, 18.) etiam ſunt $AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right.$

& inverſe $\left.\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right\} : AB = \left\{\begin{matrix} AE \\ EC \end{matrix}\right\} : AC :$

h. e. quam rationem habet unum trianguli latus ad alterum ſuorum ſegmentorum, eandem & alterum latus habet ad ſuum ſegmentum ſimiliter ſitum; ac quam rationem habet alterutrum unius lateris ſegmentum ad hoc latus, eandem alterius lateris ſegmentum ſimiliter ſitum habet ad hoc alterum latus.

§. 18.

Quod immediate ſic adſtruitur: Cum, ob parallelas BC, DE, æqualia ſint triangula BDE, CED (I, 37.); æqualia etiam ſunt (Lib. I. Ax. 2.) triangula ABE, ACD: quæ igitur tam ad idem triangulum ADE, quam ad æqualia BDE, CED, easdem habent rationes (V, 7. & Cor.);

h. e. $ABE : \left\{\begin{matrix} ADE \\ BDE \end{matrix}\right\} = ACD : \left\{\begin{matrix} AED \\ CED \end{matrix}\right.$

Atqui (VI, 1.) $ABE : \left\{\begin{matrix} ADE \\ BDE \end{matrix}\right\} = AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right.$

& $ACD : \left\{\begin{matrix} AED \\ CED \end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right.$

Ergo (V, 11.) $AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right.$

Unde inverſa colligitur per V, 4. Coroll.; vel immediate ſimili modo demonſtratur.

§. 19.

Altera propoſitionis VI, 2. parte, prioris converſa, docetur: trianguli ABC duobus lateribus AB, AC ita ſectis, ut partes unius eandem mutuo habeant rationem, quam partes ſimiliter ſitæ alterius, h. e. ut ſit $BD : DA = CE : EA$, vel $AD : DB = AE : EC$; rectam DE, quæ puncta ſectionum D, E conjungit, eſſe trianguli reliquo lateri BC parallelam.

§. 20.

Quare cum (V, 17.) diviſim ſit $BD : DA = CE : EA$
$AD : DB = AE : EC$;
ſi eſt $AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix} = AC : \begin{Bmatrix} AE \\ CE \end{Bmatrix}$:
parallela etiam eſt trianguli tertio lateri BC recta DE, jungens puncta D, E, quibus altera ejus duo latera AB, AC ita ſecantur, ut unum horum laterum ad alterutrum ſuorum ſegmentorum eandem habeat rationem, ac latus alterum ad ſuum ſegmentum ſimiliter ſitum; & inverſe.

§. 21.

Idemque ſic immediate colligitur: quoniam (VI, 1.)
$$ABE : \begin{Bmatrix} ADE \\ BDE \end{Bmatrix} = AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix}, \quad ACD : \begin{Bmatrix} AED \\ CED \end{Bmatrix} = AC : \begin{Bmatrix} AE \\ CE \end{Bmatrix};$$
ſi 1°. $AB : AD = AC : AE$;
pariter eſt (V, 11.) $ABE : ADE = ACD : AED$
ideoque (V, 9.) $ABE = ACD$
unde (Lib. I. ax. 3.) $BDE = CED$
& hinc (I, 39.) rectæ BC, DE parallelæ.
2°. Si $AB : BD = AC : CE$:
ſunt (V, 11.) $ABE : BDE = ACD : CED$
(V, 17.) $ADE : BDE = AED : CED$
(V, 9.) $BDE = CED$
unde (I, 39.) rurſus BC, DE parallelæ.

Conditiones inverſæ vel ad præcèdentes reducuntur; vel argumentatio ex iis ſimiliter ſtruitur.

§. 22.

§. 22.

Cum (V, 16.) alterne ſint

$BD : CE = AD : AE$, $AB : AC = AD : AE = BD : CE$,

ſi $BD : DA = CE : EA$, $AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix} = AC : \begin{Bmatrix} AE \\ CE \end{Bmatrix}$;

ac viciſſim: recta etiam DE, uni BC laterum trianguli ABC parallela, ita ſecat reliqua ejus latera AB, AC, ut unum ſegmentum unius ad ſegmentum ſimiliter ſitum alterius eandem habeat rationem, quam alterum ſegmentum prioris ad alterum poſterioris, & quam ipſum latus prius ad poſterius; ac viciſſim.

§. 23.

Propoſitio VI, 2. ipſa, & quæ hactenus ei fuerunt adjuncta, etiam valent, ac ſimiliter demonſtrantur, ſi (*Fig. 3.*) recta DE ſecat trianguli ABC latera AB, AC, ad oppoſitas vertici A partes producta.

Nempe rurſus ductis BE, CD rectis; ſunt (VI, 1.)

$$BDE : \begin{Bmatrix} ADE \\ BAE \end{Bmatrix} = BD : \begin{Bmatrix} DA \\ AB \end{Bmatrix}, \quad CED : \begin{Bmatrix} AED \\ CAD \end{Bmatrix} = CE : \begin{Bmatrix} EA \\ AC \end{Bmatrix};$$

$$BAE : ADE = BA : AD, \quad CAD : AED = CA : AE.$$

Quare ſi 1°. DE eſt lateri BC parallela; igitur (I, 37.) triangulum $BDE = CED$, & hinc quoque (Lib. I. Ax. 3.) $BAE = CAD$;

proinde (V, 7. & Coroll.) $BDE : \begin{Bmatrix} ADE \\ BAE \end{Bmatrix} = CED : \begin{Bmatrix} AED \\ CAD \end{Bmatrix}$

$$BAE : ADE = CAD : AED :$$

pariter ſunt (V, 11.) $BD : \begin{Bmatrix} DA \\ AB \end{Bmatrix} = CE : \begin{Bmatrix} EA \\ AC \end{Bmatrix}$

$$BA : AD = CA : AE.$$

2°. Viciſſim ſi a) $BD : DA = CE : EA$

vel $BA : AD = CA : EA$:

erit (V, 11.) $BDE : ADE = CED : AED$

vel $BAE : ADE = CAD : AED$

unde (V, 9.) $BDE = CED$

vel $BAE = CAD$

ac poſteriori caſu (Lib I. ax. 2.) rurſus $BDE = CED$.

Utroque igitur caſu ſunt BC, DE parallelæ (I, 39.).

Atque ſi β) $BD : AB = CE : AC$:
erunt (V, 11.) $BDE : BAE = CED : CAD$
(V, 19. Cor.) $BDE : ADE = CED : AED$
(V, 9.) $BDE = CED$.
ac (I, 39.) rurſus BC, DE parallelæ.

Unde cetera, uti ſuperius, invertendo & alternando colliguntur.

§. 24.

Propoſitionis VI, 2. ſi non enunciatum, expoſitio certe, quæ nunc in *Elementis* exſtat, eam ad rectam ipſa trianguli crura ſecantem, & ad ipſas horum crurum partes ita factas, ſeu ſegmenta ſtricte ſic dicta, hinc ſcilicet recta illa ſecante, inde crurum ſectorum extremis, ſeu trianguli vertice ac tertio latere terminata, reſtringit (§. 16. 19.): quod quidem ad applicationes ſequentes in *Elementor.* VI, 3. 4. 9—12. XI, 17. XII, 3. non item in *Dator.* 38. 39. ſufficit.

Annotata §. 17. ſq. 20. ſq. 23. propoſitionem ad ſegmenta crurum ipſorum pariter, atque ad oppoſitas vertici trianguli, ſeu baſi partes productorum, tam quæ hinc rectæ iſti ſecanti, inde vertici trianguli ac tertio ejus lateri, quam quæ huic tertio lateri ac vertici trianguli interjacent, extendunt; ſicque, dum in *Fig.* 2. ADE ut triangulum propoſitum, BC ut recta ejus crura AD, AE infra baſin DE producta ſecans, ſpectatur, ad ſegmenta etiam hinc ſecante hac BC, inde trianguli vertice A & tertio latere DE terminata, propoſitum VI, 2. applicant.

Et ad hæc quidem ſegmenta, hinc rectæ crura trianguli utcunque ſecanti, inde baſi ac vertici trianguli interjacentia, *Rob.* Simson (p. 177. 370) & Playfair (*Elements of geometry, containing the first ſix Books of Euclid, with two Books on the geometry of ſolids.* Edinb. 1795. p. 157. ſq.) propoſitionem VI, 2. demonſtratione eadem, ad *Fig.* 2. 3. 4. applicata extendunt, ſic eam enunciantes: Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit; proportionaliter ſecabit reliqua trianguli latera, vel latera producta: & ſi latera trianguli, vel latera producta proportionaliter ſecta fuerint; quæ ſectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

§. 25.

§. 25.

Omnia autem uno enunciato ſic etiam licet complecti: Quæ (*Fig.* 2. 3. 4.) ab cruribus ejusdem anguli BAC, vel duorum angulorum ad verticem oppoſitorum BAC, DAE, per duas rectas parallelas BC, DE, tam verticem inter & alteram earum, quam ipſas inter parallelas, abſcinduntur ſegmenta, ſic proportionalia ſunt; ut, quam rationem mutuo habent duo ſegmenta unius cruris, eandem invicem habeant duo ſegmenta homologa ſeu ſimiliter ſita cruris alterius, h. e. ut ſint $AB : AD : DB = AC : AE : EC$; & ut ſingula unius cruris ſegmenta ad ſegmenta homologa cruris alterius ſint in eadem ratione, $AB : AC = AD : AE = BD : CE$. Viciſſim parallelæ ſunt rectæ, quæ ab cruribus ejusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppoſitorum, ſegmenta alterutro ordine indicato proportionalia abſcindunt.

§. 26.

Rectæ AB, DE (*Fig.* 5. 6.) ſe ſecent in puncto C. Utrinque ab eo in ipſis AB, DE abſcindantur ſegmenta quæcunque $CM = Cm$, $CN = Cn$: & finiatur quadrilaterum $MnmN$; quod erit parallelogrammum. (*Schol. in Lib. II. Element* §. 235. ſq.)

Quæ per rectas quaſcunque LK, lk, lateribus hujus parallelogrammi parallelas, ab rectis AB, DE abſcinduntur ſegmenta puncto C adjacentia, erunt rectis CM, CN proportionalia; $\left.\begin{matrix} CK : CL \\ Ck : Cl \end{matrix}\right\} = CM : \left\{\begin{matrix} CN \\ Cn \end{matrix}\right.$: & viciſſim quælibet recta, in ipſis AB, DE ab puncto C inde abſcindens ſegmenta rectis CM, CN proportionalia, erit alteris parallelogrammi $MnmN$ lateribus oppoſitis parallela (§. 25.)

§. 27.

Hinc ſolvitur *Problema*, quod eſt *Locus* 3. *Libri prioris* APOLLONII *de ſectione rationis*: Poſitione datis duabus rectis AB, Dh, ſe mutuo in C ſecantibus, per datum extra eas, in eodem cum ipſis plano, punctum H ducere lineam rectam, quæ occurrens duabus AB, DE auferat ab ipſis ſegmenta puncto C adjacentia, quæ ſint inter ſe in ratione data, rectæ ſcilicet datæ M ad datam N. (APOLLONII *Pergæi De ſectione rationis Libri duo, ex Arabico MSto Latine verſi. Accèdunt ejusdem De ſectione ſpatii*

ſpatii Libri duo reſtituti. Præmittitur PAPPI *Alexandrini Præfatio ad VII*^mum *Collectionis mathematicæ, nunc primum Græce edita, cum Lemmatibus ejusdem Pappi ad hos Apollonii Libros. Opera & ſtudio Edmundi* HALLEY. Oxon. 1706. p. 10. ſqq.)

In recta *AB* enim ab alterutra puncti *C* parte abſciſſa $CM =$ datæ *M*; in recta autem *DE* utrinque ab puncto *C* abſciſſis $CN = Cn =$ datæ *N*; & ductis *MN*, *Mn* rectis; his autem per datum punctum *H* parallelis *LHK*, *Hlk*, *Hkl*, quæ rectis *AB*, *DE* occurrent (§ 15.): erunt $\left.\begin{matrix} CK : CL \\ Ck : Cl \end{matrix}\right\} = CM : \left\{\begin{matrix} CN \\ Cn \end{matrix}\right.$ (§. 25. ſq. n°. 1.) $= M : N$ (V. 11.).

Rectæ igitur *LHK*, $\left\{\begin{matrix} Hlk \\ Hkl \end{matrix}\right.$ ſatisfaciunt problemati; eæque ſolæ (§. 25. ſq. n°. 2.)

Et ſic quidem problema in Scholio p. 14. ſq. ſolvit HALLEY. Analyſin ejus aliter inſtituit APOLLONIUS; quæ vero ad eandem conſtructionem deducit.

§. 28.

Quodſi altera e parallelis, nempe *Hlk* vel *Hkl*, per punctum *C* tranſit; altera tantum *LHK* unico modo rem præſtat. Ceteris caſibus duplici ſemper modo problema componetur. Et quidem, ſi laterum parallelogrammi *MmnN* aliquod per datum punctum *H* tranſit, ipſum hoc latus eſt altera recta ducenda.

§. 29.

Duæ porro rectæ non contiguæ, duabus interceptæ parallelis *BC*, *FD* (*Fig.* 7.), pariter ab tertia *GE* his parallela proportionaliter ſecantur; & viciſſim.

Quodſi enim I°. rectæ *FB*, *DK*, parallelis *BC*, *FD* interceptæ, & ipſæ ſunt parallelæ; ideoque æquales (I, 34.):

1°. ducta *GE* rectis *BC*, *FD* parallela, pariter ſunt $FG = DH$, $GB = HK$ (I, 34.);
quare (V, 7. Coroll.) $FG : GB : FB = DH : HK : DK$
& alterne (V, 16.) $FG : DH = GB : HK = FB : DK$.

2°Si-

2°. Si vel $\left.\begin{matrix} FG \\ GB \end{matrix}\right\} : FB = \left\{\begin{matrix} DH \\ HK \end{matrix}\right. : DK$;

vel $FG : GB = DH : HK$,

ideoque (V, 18.) $FB : GB = DK : HK$;

ob $FB = DK$ (dem.), ſunt vel FG & DH, vel GB & HK æquales (V, 14.); ideoque GH, FD, BC parallelæ (I, 33. 30.).

II°. Quodſi parallelæ non ſunt rectæ FB, DC, parallelis BC, FD interceptæ: ducta per alterutrum unius DC extremum D alteri FB parallela DK inter easdem parallelas BC, FD;

1°. ob $DE : EC : DC = DH : HK : DK$,

quando GE parallela eſt ipſis BC, FD, (VI, 2. & §. 17. ſq.);

ac $DH : HK : DK = FG : GB : FB$ (§. 29. n°. I. 1.):

ſunt (V, 11.) $DE : EC : DC = FG : GB : FB$,

& (V, 16.) $DE : FG = EC : GB = DC : FB$.

2°. Si vel $DE : EC = FG : GB$, vel $\left.\begin{matrix} DE \\ EC \end{matrix}\right\} : DC = \left\{\begin{matrix} FG \\ GB \end{matrix}\right. : FB$;

nec eſſet GE rectis BC, FD parallela: per punctum G ducta ipſis BC, FD parallela GI ad occurſum usque rectæ DK in I, & juncta EI recta,

foret (§. 29. n°. I. 1.) $FG : GB = DI : IK$, $\left.\begin{matrix} FG \\ GB \end{matrix}\right\} : FB = \left\{\begin{matrix} DI \\ IK \end{matrix}\right. : DK$

itaque (V, 11.) $DE : EC = DI : IK$, vel $\left.\begin{matrix} DE \\ EC \end{matrix}\right\} : DC = \left\{\begin{matrix} DI \\ IK \end{matrix}\right. : DK$

proinde EI rectæ BC parallela (VI, 2. & §. 20. ſq.): igitur rectæ EI, GI invicem eſſent parallelæ (I, 30.); quod repugnat.

§. 30.

Propoſitum §. 29. generatim ſic quoque, ab altera unius rectæ DC extremo D ad terminum oppoſitum B alterius FB ducta DB recta (*Fig.* 8.), evincitur.

1°. Si GE eſt rectis BC, FD parallela:

ſunt (VI, 2. & §. 17. ſq.) tam $FG : GB : FB$ quam $DE : EC : DC$ $\Big\} = DL : LB : DB$

ideoque (V, 11.) $FG : GB : FB = DE : EC : DC$

ac (V, 16.) $FG : DE = GB : EC = FB : DC$.

2°. Vi-

2°. Viciſſim ſi $FG:GB=DE:EC$, vel $\left.\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\}:FB=\left\{\begin{matrix}DE\\EC\end{matrix}\right.:DC$; nec eſſet GE rectis BC, FD parallela: per punctum G ducta rectæ FD, ideoque (I, 30.) etiam alteri BC parallela GM ad occurſum usque rectæ DB in M, & juncta EM recta;

foret (VI,2. & §.17.ſq.) $FG:GB=DM:MB$, $\left.\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\}:FB=\left\{\begin{matrix}DM\\MB\end{matrix}\right.:DB$;

igitur (V, 11.) $DE:EC=DM:MB$, vel $\left.\begin{matrix}DE\\EC\end{matrix}\right\}:DC=\left\{\begin{matrix}DM\\MB\end{matrix}\right.:DB$,

& hinc (VI, 2. & §. 20. ſq.) EM rectæ BC parallela; ac (I, 30.) rectæ EM, GM parallelæ inter ſe, quæ tamen in puncto M concurrunt.

§. 31.

Priore præcedentem directam demonſtrandi modo (§. 29. n°. II. 1.) EUCLIDES in VI, 10.; altero (§. 30. n°. I.) in adſtruendo theoremate generaliori XI, 17. utitur.

PROPOSITIO III.

§. 32.

Quæ trianguli æquicruri angulum ad verticem bifariam dividit recta, baſiam & angulos rectos ſecat baſin (I, 4). Viciſſim, quæ a vertice trianguli æquicruri ad punctum bifectionis baſis ducitur recta, baſi normalis eſt, atque angulum ad verticem bifariam ſecat (I, 8.).

§. 33.

Quæ autem trianguli non-æquicruri angulum ad verticem bifariam dividit recta, ad angulos obliquos & in partes inæquales ſecat baſin: ſic ut minus ſegmentum adjaceat cruri minori; pariterque acutus ſit angulus, qui cruri minori opponitur.

Nempe ſi $AC>AB$ (Fig. 9.), & AD bifariam dividit angulum BAC: ob angulum $ABC>C$ (I, 18.), ſunt anguli $ABC+DAB>C+DAC$; ideoque (I, 32.) angulus $ADC>ADB$.

Et ab AC abſciſſa $AE=AB$, ac juncta DE recta: ſunt (I, 4.) $BD=DE$, ang. $AED=ABD$. Quare, producta CB verſus H, eſt

ang.

ang. $DEC = ABH$ (I, 13.). Sed ang. $ABH > C$ (I, 16.). Ergo & ang. $CED > C$. ideoque (I, 19.) $CD > \begin{cases} DE. \\ DB \end{cases}$

§. 34.

Quæ igitur trianguli non æquicruri basin BC bifariam secat ex vertice trianguli A ducta AF recta, in hujus segmentum CD incidit; proinde in inæquales dividit angulum ad verticem BAC, sic ut major sit angulus BAF, qui adjacet cruri minori AB: eademque AF obliqua est basi; ob angulum $AFC >$ obtuso ADC, & $AFB <$ acuto ADB (I, 16.).

§. 35.

Posterior pars propositi §. 34. immediate etiam consequitur ex I, 25. Prior sic quoque ostenditur: continuata AF, donec sit $FG = FA$, & ducta BG recta; sunt (I, 15. 4.) ang. $G = CAF$, & $BG = AC > AB$; igitur (I, 18.) ang $BAG > \begin{cases} G \\ CAF \end{cases}$

§. 36.

Hinc (§. 35.) viciſſim intra angulum BAF cadit recta AD bifariam dividens angulum BAC; ideoque in inæqualia secat basin BC, sic ut minus sit segmentum BD, quod adjacet cruri minori AB.

§. 37.

Quæ de segmentis basis trianguli non-æquicruri, partibusque oppositis anguli ad verticem ostensa sunt §. 33. sqq., complet Propositio VI, 3. docens: rectam, quæ bifariam dividit angulum ad verticem trianguli non-æquicruri, basin in inæqualia sic secare, ut segmentum adjacens cruri minori altero segmento minus sit in eadem ratione, in qua crus hoc minus est altero crure; ac viciſſim, basi divisa in segmenta cruribus trianguli adjacentibus proportionalia, rectam, a vertice trianguli ad punctum sectionis basis ductam, bifariam dividere angulum ad verticem.

Ceterum hoc ita asserit, ut casum quoque trianguli æqui cruri (§. 32.) complectatur.

§. 38.

§. 38.

Rectam CE (*Fig.* 10.), per C ipſi DA parallelam, concurrere cum crure BA ultra verticem A producto, conſequitur ex I, 29. Corollario §. 15. commemorato; vel ſimili modo, quo in demonſtratione VI, 4. ad Lib. I. Ax. 11. reducitur. Poſterius ſupplet CLAVIUS (p. 546.).

§. 39.

Juberi etiam poteſt, ut ab producta BA abſcindatur $AE = AC$, & jungatur CE recta. Tunc enim

1°. ob angulum $BAC = E + ACE$ (I, 32.) $= \begin{cases} 2E \\ 2ACE \end{cases}$ (I, 5.), ſunt anguli $\left\{ \begin{matrix} E \\ ACE \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}BAC = \begin{cases} BAD \\ DAC \end{cases}$, ſi recta AD bifariam dividit angulum BAC; itaque CE, AD parallelæ (I, 27. ſq.); & hinc $BD : DC = BA : AE$ (VI, 2. n° 1.) $= BA : AC$ (V, 7. 11.).

2°. Si $BD : DC = BA : AC$ ideoque etiam $= BA : AE$ (V, 7. 11.): ſunt CE, AD parallelæ (VI, 2. n° 2.); proinde anguli $BAD = E$, $DAC = ACE$ (I, 29.); & hinc, ob ang. $E = ACE$ (I, 5.), pariter angulus $BAD = DAC$.

§. 40.

Cum ſic in demonſtratione partis ſecundæ applicetur pars poſterior propoſitionis VI, 2; altera hæc conſtructio & demonſtratio potius, quam quæ nunc in *Elementis* exſtat, eaque quodammodo manca (§. 38.), genuina eſſe videtur.

§. 41.

Duobus cujuscunque trianguli ABC (*Fig.* 11.) angulis A, B bifariam diviſis per rectas AG, BG; quæ ex puncto G concurſus ipſarum ad verticem tertii anguli C ducitur recta CG, pariter hunc bifariam ſecat.

Perpendicula enim GF, GH, GI, ex puncto G demiſſa in latera trianguli, ſunt æqualia per demonſtr. IV, 4. Quare, ob $GF = GH$, angulos ad F, H rectos, & hypotenuſam CG communem, ideoque etiam $CF = CH$ (I, 47. Coroll.), eſt angulus $GCA = GCB$ (I, 8.).

§. 42.

§. 42.

Viciſſim tres rectæ, bifariam ſecantes angulos cujuslibet trianguli, in eodem intra triangulum puncto concurrunt.

Duabus enim angulos A, B trianguli ABC (*Fig.* 12.) bifariam ſecantibus, & in puncto G concurrentibus AG, BG occurrat, ſi fieri poſſit, recta bifariam angulum C dividens in punctis H, I ab G diverſis. Jungatur GC recta. Cum hæc bifariam ſecet angulum C (§. 41.): foret angulus $ACG = ACI$, uterque nimirum $= \frac{1}{2}ACB$; quod repugnat Libri I. Axiomati 9.

§. 43.

Rectæ bifariam ſecantes angulos cujuslibet trianguli, & ad latera usque oppoſita productæ, ita ſe mutuo in puncto ſectionis communi dividunt, ut cujuslibet ſegmentum adjacens angulo trianguli ſit ad ejus ſegmentum adjacens lateri oppoſito trianguli, ut ſumma laterum trianguli comprehendentium illum angulum eſt ad latus hoc ei oppoſitum; tota autem recta ſit ad ſegmentum ipſius adjacens $\left\{\begin{matrix}\text{angulo}\\\text{lateri}\end{matrix}\right\}$ trianguli, uti perimeter trianguli eſt ad $\left\{\begin{matrix}\text{ſummam laterum circa hunc angulum}\\\text{hoc latus}\end{matrix}\right\}$.

Rectæ AD, BL, CK (*Fig.* 13.) bifariam dividant angulos trianguli ABC; ac ſe mutuo ſecent in puncto G (§. 42.)

Erit $AG : GD = AB : BD$ ob ang. $ABG = DBG$
$= AC : CD$ ob ang. $ACG = DCG$ (VI, 3.).
$= BA+AC : CB$ (V, 12.)

& hinc $AD : \left\{\begin{matrix}AG\\GD\end{matrix}\right\} = BA+AC+CB : \left\{\begin{matrix}BA+AC\\CB\end{matrix}\right.$ (V, 18.)

Eodemque modo oſtenditur eſſe

$BL : BG : GL = AB+BC+CA : AB+BC : CA$
$CK : CG : GK = AC+CB+BA : AC+CB : BA.$

§. 44.

In triangulo igitur æquilatero ſunt

$AD : AG : GD$
$BL : BG : GL$ $\Big\} = 3 : 2 : 1.$
$CK : CG : GK$

§. 45.

Viciſſim ſi recta, trianguli perimetro terminata, & aliquem ejus angulum bifariam dividens, ita ſecatur, ut ſegmentum ipſius adjacens vertici anguli, quem biſecat, ſit ad ſegmentum adjacens lateri oppoſito trianguli, uti ſumma laterum circa angulum illum eſt ad tertium trianguli latus; ceteræ etiam rectæ, per punctum hujus ſectionis ex verticibus angulorum trianguli ductæ, bifariam hos angulos dividunt.

Bifariam angulum BAC dividat recta AD; ipſamque punctum G ita ſecet, ut ſit $AG : GD = BA + AC : CB$;
angulos autem ABC, ACB bifariam, ſi fieri poſſit, non dividant rectæ BG, CG, ſed BH, CH (§. 42.)

Ita foret $AH : HD = BA + AC : CB$ (§. 43.)
ideoque $AG : GD = AH : HD$ (V, 11.)
$AD : GD = AD : HD$ (V, 18.)
$GD = HD$; contra Lib. I. Ax. 9.

§. 46.

Simili modo enunciantur, & vel immediate ſimiliter demonſtrantur, vel ad præcedentem (§. 45.) ope V, 17. reducuntur converſæ partis ſecundæ §. 43.

§. 47.

Recta, bifariam dividens angulum exteriorem ad verticem trianguli æquicruri, parallela eſt baſi; & viciſſim.

Sit (*Fig.* 14.) $AB = AC$, & CAF recta: ac

1°. bifariam angulum BAF ſecet recta AG. Erunt anguli $\left.\begin{matrix} BAG \\ GAF \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}BAF$ (hyp.) $= \frac{B+C}{2}$ (I, 32.) $= \left\{\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}\right.$ (I, 5.); igitur AG, BC parallelæ (I, 27. ſq.)

2°. Parallela ſit AG baſi BC. Erunt anguli $BAG = B$, $GAF = C$ (I, 29.); ideoque $BAG = GAF$, ob $B = C$ (I, 5.).

§. 48.

Recta vero, bifariam dividens angulum exteriorem ad verticem trianguli non æquicruri, concurrit cum baſi producta ad partes eruris minoris

minoris; eamque ita ſecat, ut rectæ in ipſa ſectionem inter ac terminos baſis abſciſſæ eandem habeant rationem, quam crura, quibus adjacent, trianguli.

Viciſſim ſi baſis trianguli non-æquicruri ad partes cruris minoris ſic producitur, ut, quæ hinc fit, tota recta ad adjectam baſi eandem habeat rationem, quam trianguli crus majus habet ad minus; recta ab termino continuationis hujus per verticem trianguli ducta bifariam dividit angulum trianguli exteriorem ad verticem...

Sit (*Fig.* 15.) $AB < AC$: itaque angulus $C < ABC$ (I, 18.); & angulus exterior BAF vel $CAH = C + ABC$ (I, 32.) $< 2ABC$.

1°. Bifariam angulum BAF vel CAH dividat recta KAG.

Erit ang. $BAG = \frac{1}{2}BAF$, vel (I, 15.) $= \frac{1}{2}CAH$, minor angulo ABC (demonſtr.); igitur anguli $BAG + ABG < ABC + ABG < 2$ Rect. (I, 13.): proinde rectæ CBG, KAG ad has partes concurrunt (Lib. I. Ax. 11.).

Ab AC abſcindatur $AE = AB$; & jungatur recta BE. Ob angulum $BAF = ABE + AEB$ (I, 32.) $= \begin{Bmatrix} 2ABE \\ 2AEB \end{Bmatrix}$ (I, 5.), ſunt anguli $\begin{Bmatrix} ABE \\ AEB \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}BAF = \begin{Bmatrix} BAG \\ FAG \end{Bmatrix}$ (hyp. vel I, 15.); ideoque AG, BE parallelæ (I, 27. ſq): & hinc $CG : GB = CA : AE$ (§. 17.) $= CA : AB$ (V, 11.).

2°. Sit $CG : GB = CA : AB = CA : AE$, rurſus facta $AE = AB$. Erunt KAG, BE parallelæ (§. 20. ſq.): proinde anguli $\begin{Bmatrix} BAG \\ KAH \end{Bmatrix} = ABE$, $\begin{Bmatrix} FAG \\ CAK \end{Bmatrix} = AEB$ (I, 29.); & hinc $BAG = FAG$, $KAH = CAK$, ob $ABE = AEB$ (I, 5.).

§. 49.

Juberi etiam §. 48. poteſt, ut parallela rectæ KAG per B agatur BE; quæ, ob angulum $ABC > G$ (I, 16.), intra triangulum ABC cadet: & tunc propoſitum ſimiliter ac VI, 3. in textu *Elementorum* demonſtari.

Sicque demonſtrationem ejus in Propoſitione A. poſt tertiam Libro VI. inſerta tradunt *Rob.* SIMSON (p. 180. ſq. *Matthias* p. 77.), ac PLAYFAIR (p. 160. ſq.).

Prior etiam in *Notis* (p. 370. ſq. *Matthias* p. 77. ſq.) monet: "Caſus" ſecundus, qui habetur in Prop. A, pariter utilis ac primus, tertiæ Pro-" "poſitio-

"positioni additus est; videlicet is, quo angulus trianguli exterior bifa-
"riam secatur recta linea. Demonstratio ejus simillima est demonstra-
"tioni primi casus; & ob hanc forsan causam tum ea, tum enunciatio
"casus, omissa est ab imperito quodam editore. PAPPUS certe hac, tan-
"quam propositione elementari" [simul cum ipsa VI, 3.] "sine demon-
"stratione utitur in Prop. 39. Libri VII. *Collect. Math.*" Lemm. 25. Li-
bri I. *Apollonii de determinata sectione.* (Pisauri 1588. fol. 183. b. sq.).
Conf. *Rob.* SIMSON *de determinata sectione libri* IV. (p. 27. *Opp. reliq.*
Glasg. 1776.).

§. 50.

Utramque propositionem VI, 3. & §. 48, quod & PLAYFAIR (p. 384.)
notat, uno quoque enunciato licet complecti: Si trianguli angulus
{interior / exterior} bifariam dividitur, secans autem angulum recta secat & basin
{ipsam / productam}; basis segmenta, hinc terminis ejus, inde puncto sectionis
intercepta, eandem habebunt rationem, quam crura ipsis adjacentia trian-
guli: vicissim si basis ita {secatur / continuatur}, ut segmenta, terminis ejus ac
{puncto sectionis / extremo continuationis} intercepta, cruribus trianguli adjacentibus pro-
portionalia sint; quæ per verticem trianguli & {punctum sectionis / extremum continuationis}
basis ducitur recta, trianguli ad verticem angulum {interiorem / exteriorem} bifariam
dividet.

PROPOSITIO IV.

§. 51.

Sensum partis posterioris afferti Propositionis hujus: και ομολογοι
αι υπο τας ισας γωνιας υποτεινουσαι πλευραι, declarat Lib. V. Defini-
tio 12: Ομολογα μεγεθη λεγεται ειναι τα μεν ηγουμενα τοις ηγουμενοις, τα
δε επομενα τοις επομενοις. Eo scilicet ordine in triangulis invicem æqui-
angulis duo quælibet latera unius eandem rationem quam duo alterius
latera

latera circa angulum æqualem habere indicantur, ut æquales duorum triangulorum angulos ſubtendant latera, quæ conſtituunt terminos antecedentes duarum rationum; pariterque igitur termini earum conſequentes ſint latera angulis triangulorum æqualibus oppoſita.

§. 52.

In demonſtratione latera circum æquales angulos B & DCE, ACB & E (*Fig.* 16.) easdem invicem rationes eo ordine habere ex propoſitionibus VI, 2. I, 34. V, 7. 11. immediate oſtenditur, ut terminos antecedentem & conſequentem ſingularum rationum conſtituant latera duorum triangulorum æqualibus eorum angulis oppoſita;

nempe $BA : CD = BC : CE$

$BC : CE = AC : DE$

Unde & (V, 11.) $BA : CD = AC : DE$

Quare generatim etiam, quam rationem habent duo duorum triangulorum invicem æquiangulorum latera æquales ipſorum ſubtendentia angulos, eandem habent bina illorum reliqua latera æqualibus angulis oppoſita; pariterque (V, 12.) eorum perimetri:

$BA : CD = BC : CE = AC : DE = AB + BC + CA : DC + CE + ED.$

§. 53.

Loco propoſitionis VI, 2. adhibita ea, quæ inde fuit §. 22. deducta; immediate conſequitur laterum proportio eo ordine, quem aſſertum hujus V^ta enunciat.

§. 54.

Vi ejusdem ſimilia juxta Lib. VI. Defin. 1. dicuntur triangula invicem æquiangula; vel (I, 32. Coroll.) quorum ſaltem duo anguli unius duobus alterius, ſinguli ſingulis, ſunt æquales.

§. 55.

Triangula, quæ conditionibus propoſitionis I, 26. reſpondent, h. e. quæ duos angulos duobus angulis æquales habent, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, quod utrinque vel angulis æqualibus interjacet, vel uni angulorum æqualium opponitur, ſimilia ſunt & æqualia.

§. 56.

§. 56.

Quæ vero binos angulos æquales habent, & unum latus uni æquale, quod autem in uno triangulo æqualibus angulis interjacet, in altero unum æqualium angulorum ſubtendit, nonniſi ſimilia ſunt.

§. 57.

Triangula æquicrura, quorum anguli ad vertices, vel alterutri ad baſin anguli ſunt æquales, ſimilia ſunt. (I, 5. & 32. Coroll.)

§. 58.

Triangula quævis æquilatera ſunt ſimilia. (I, 5. Cor. & 32. Cor.)

Ceterum proportionalia eſſe ipſorum latera, præter VI, 4^{tam}, etiam conſequitur ex V, 7. Corollario: quod æquales magnitudines *A*, *B* ad æquales *C*, *D* eandem habeant rationem.

Indidemque & ex I, 32. Coroll. univerſim ſimiles eſſe figuras rectilineas regulares, ſeu æquiangulas & æquilateras, ejusdem numeri laterum, conſequitur.

§. 59.

Propoſitiones IV, 2. 3. docent circulo dato inſcribere & circumſcribere triangulum ſimile dato.

§. 60.

Recta, quæ in triangulo parallela ducitur uni ejus lateri (*Fig.* 2.) abſcindit (I, 29.) triangulum ſimile toti. (Clavius p. 547.)

§. 61.

Recta hæc ſe habet ad latus trianguli, cui eſt parallela, uti ſegmentum alterutrius reliquorum trianguli laterum, ipſam inter & verticem anguli oppoſiti comprehenſum, eſt ad hoc latus (§. 52.).

§. 62.

Eadem per rectas ex vertice trianguli oppoſito ductas in eadem ratione ſecatur ac baſis trianguli, ſeu latus ejus, cui eſt parallela. (Clavius p. 549.)

Nempe

Nempe (*Fig.* 17.) quodlibet ſegmentum baſis *BC* eſt ad ſegmentum iisdem rectis comprehenſum parallelæ *DE*, uti alterutra recta ab trianguli vertice *A* ad terminos prioris ducta eſt ad ſegmentum ipſius vertici *A* & rectæ *DE* interjacens (§. 52. 61.); & poſteriorum eadem ſemper eſt mutua ratio (§. 17. ſq.); ideoque etiam priorum (V, 11.); ac alterne (V, 16.).

$$\left.\begin{array}{llllll} BF : DI = AB : AD = AF : AI \\ FG : IK = AF : AI = AG : AK \\ GH : KL = AG : AK = AH : AL \\ \qquad\qquad \&c. \\ BG : DK = AB : AD = AG : AK \\ FH : IL = AF : AI = AH : AL \\ \qquad\qquad \&c. \end{array}\right\} \text{(§. 52. 61.)}$$

& $AB : AD = AF : AI = AG : AK = AH : AL$ &c. (§. 17. ſq.)
Quare $BF : DI = FG : IK = GH : KL = BG : DK = FH : IL$ &c. (V, 11.)
& $BF : FG : GH : BG : FH$ &c. $= DI : IK : KL : DK : IL$ &c. (V, 16.)

§. 63.

Pariter, ſi (*Fig.* 3. 4.) recta *DE*, trianguli *ABC* lateri *BC* parallela, ſecat ejus reliqua latera producta, eſt triangulum *ADE* ∽ *ABC*; $DE : BC = AD : AB = AE : AC$; & rectæ per verticem *A* ductæ ipſas *BC*, *DE* ſecant in eadem ratione.

§. 64.

Quodſi igitur a duabus parallelis *AB*, *DE* (*Fig.* 18. 19.), ab punctis inde *C*, *F* in ipſis, duo quæcunque ſegmenta inæqualia *CM*, *FN* ad easdem punctorum *C*, *F* partes abſcinduntur; & rectæ *CF*, *MN* junguntur, quæ productæ ſibi mutuo occurrunt in puncto *G* extra parallelas *AB*, *DE* (ſumtis enim *GM*, *FN* æqualibus, parallelæ per I, 33. forent *CF*, *MN*; ac viciſſim, per I, 34.): bina ſegmenta, ut *CK*, *FL*, quæ rectæ quæcunque per punctum *G* actæ, ut *GK*, ab iisdem parallelis *AB*, *DE*, ex punctis inde *C*, *F*, abſcindunt, erunt inter ſe uti *CM* ad *FN* (§. 62.).

§. 65.

Pariter ſi a duabus parallelis *AB*, *DE*, ab punctis inde *C*, *F* in ipſis, duo quæcunque ſegmenta *CM*, *Fn* ad alternas punctorum *C*, *F* partes abſcinduntur; & rectæ *CF*, *Mn* junguntur, quæ ſe mutuo in puncto

puncto g intra parallelas secabunt: bina segmenta, ut Ck, Fl, quæ rectæ quæcunque per punctum g actæ, ut kgl, ab iisdem parallelis AB, DE, ex punctis inde C, F abscindunt, erunt inter se uti CM ad Fu (§. 63.).

§. 66.

Si latera BC, AC trianguli ABC (*Fig.* 20.) bifariam secantur per rectas AD, BE ex verticibus angulorum oppositorum A, B ductas; recta quoque CF, ex tertii anguli C vertice ducta per punctum sectionis G duarum AD, BE, bifariam secat tertium trianguli latus AB.

Quippe ob $BD = DC$, $AE = EC$, utrumque triangulum ABD, BAE dimidium est trianguli ABC (I, 38. vel VI, 1.): igitur triangulum $ABD = BAE$; &, demto communi ABG, triangulum $GBD = GAE$: pariterque $2GBD = 2GAE$; h. e. ob $BD = DC$, $AE = EC$, triangulum $GBC = GAC$ (I, 38. vel VI, 1.).

Atqui tam triang. $GBC : GBF$ quam triang. $GAC : GAF$ $\Big\} = CG : GF$ (VI, 1.)

Ergo (V, 11.) triang. $GBC : GBF = GAC : GAF$

& hinc (V, 14.) triang. $GBF = GAF$

ac (I, 38. conv.) $BF = AF$.

Aliam hujus demonstrationem prolixiorem, &, præter plerasque præcedentes, propositionibus VI, 2. 19. 22. nixam, habet Cardanus (*De subtilitate Libri* XXI. Basil. 1560. Lib. I. p. 70. sqq.).

§. 67.

Tres rectæ, quæ ex singulorum trianguli cujuscunque ABC (*Fig.* 21.) angulorum verticibus A, B, C ducuntur ad puncta D, E, F laterum oppositorum, ubi hæc bifariam dividuntur, in eodem intra triangulum puncto se secant.

Duas enim AD, BE, quæ se in puncto G secant, trajiciat, si fieri possit, tertia CF in punctis H, I. Per puncta C, G agatur recta CGK. Cum hæc bifariam secet latus AB in puncto K, ubi ei occurrit (§. 66.); atque hoc coincidere non possit cum puncto F (Lib. I. Ax. 12.): foret AB bifariam secta in duobus punctis F, K; quod fieri nequit (Lib. I. Ax. 7. 9.).

§. 68.

§. 68.

Eædem tres rectæ ita se in puncto communi secant, ut segmentum cujuslibet adjacens lateri trianguli, ejusdemque segmentum adjacens, vertici anguli oppositi, ac tota recta sint uti 1 : 2 : 3; triangulum vero in sex triangula æqualia dividunt; ad punctum autem sectionis communis usque tantum ductæ triangulum dividunt in tria æqualia.

Nempe (*Fig.* 20.) 1°. ob $BD:DC=AE:EC=BF:AF$ (supp. & Lib. V. Def. 5.), sunt DE & AB, DF & AC parallelæ (VI, 2.). Quare (I, 15. 29.) triangula GDE & GAB, GDF & GAC sunt æquiangula; ideoque

$$GD:GA=\begin{Bmatrix}GE:GB=DE:AB\ (\S\ 52.)\\ GF:GC=DF:AC\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}=CD:CB\\ =BD:BC\ (\S.\ 61.)\end{Bmatrix}=1:2$$

& $GD:GA:AD=GE:GB:BE=GF:GC:CF=1:2:3$ (V, 18.)

2°. Triang. $GBD=GAE$ (§. 66. Dem.) $=GDC=GEC$ (I, 38.):

& triang. $\begin{Bmatrix}GFB:GCB\\ GFA:GCA\end{Bmatrix}=GF:GC$ (VI, 1.) $=1:2$ (n°. 1.)

itaque $\begin{matrix}2GFB=GCB=2GBD\\ 2GFA=GCA=2GAE\end{matrix}$; & pariter $\begin{matrix}GFB=GBD\\ GFA=GAE\end{matrix}$.

3°. Triang. $GBC=GAC$ (§. 66. Dem.);

& triang. $GAB=\begin{Bmatrix}2GFB\\ 2GFA\end{Bmatrix}$ (I, 38.) $\begin{matrix}=GBC\\ =GAC\end{matrix}$ (n°. 2.).

§. 69.

Cum in triangulis æquilateris rectæ bifariam dividentes angulos bifariam quoque secent latera opposita, & viciſſim (I, 4. 8.); liquet identitas conclusionum §. 44. 68. ad ipsa applicatarum.

Eademque per rectas AD, BE, CF in sex; per rectas AG, BG, CG in tria triangula similia & æqualia dividuntur.

§. 70.

Viciſſim si recta ab vertice aliquo trianguli ad punctum bisectionis lateris oppositi ducta ita secatur, ut segmentum ipsius adjacens vertici trianguli duplum sit alterius segmenti adjacentis lateri oppositi trianguli; ceteræ etiam rectæ per punctum hujus sectionis ex verticibus trianguli ductæ bifariam latera iis opposita secant.

Bifariam latus BC trianguli ABC ſecet recta AD; ipſa vero puncto G ita ſecetur, ut ſit $AG = 2GD$.

Ductis BGE, DE rectis, erunt triangula $BAG = 2BGD$, $EAG = 2EGD$ (VI, 1.)

igitur triangulum $BAE = 2BDE$.

Sed ob $BC = 2BD$ (ſupp.), etiam triangulum $BCE = 2BDE$ (VI, 1.)

Quare triangulum $BAE = BCE$

& hinc (I, 38. conv) $AE = CE$.

Similiterque oſtenditur, vel nunc per §. 66. infertur: ducta CGF recta fieri etiam $AF = BF$.

§. 71.

Pariter ſi tres rectæ ab puncto intra triangulum ad vertices angulorum ejus ductæ triangulum in tria æqualia dividunt; rectæ hæ ad latera usque trianguli oppoſita continuatæ bifariam ea dividunt.

Rectis enim GA, GB, GC in tria triangula æqualia dividentibus triangulum ABC; & qualibet earum AG ad latus usque oppoſitum BC continuata:

eſt (VI, 1.) triang. $AGB : GDB = AG : GD = AGC : GDC$

Quare, ob triang $AGB = AGC$ (ſupp.), etiam triang. $GDB = GDC$ (V, 14.);

& hinc (I, 38. conv.) $BD = DC$.

Propositiones V. VI.

§. 72.

Propoſitiones hæ converſæ ſunt præcedentis quartæ; atque uti hæc propoſitioni I, 26. ita illæ propoſitionibus I, 8. 4. reſpondent, ad quas earum demonſtrationes reducuntur, & ſub quarum conditionibus triangula ſimilia & æqualia ſunt.

§. 73.

Sub V^tæ conditionibus ſimilia eſſe triangula propoſitio hæc æque immediate ac IV^ta efficit (§. 54.): poſitis autem VI^tæ conditionibus, mediante IV^ta demum proportionalitas reliquorum circa angulos æquales laterum, ad triangulorum ſimilitudinem per Lib. VI. Defin. 1. requiſita, colligatur.

§. 74.

§. 74.

Conditiones V^tæ ſic etiam alterne (V, 16.) ſtatui poſſunt: ut unius trianguli latera ad latera alterius, ſingula ad ſingula, eandem rationem habere ponantur; & tum æquales erunt bini triangulorum anguli, quos latera ejusdem rationis terminos conſtituentia ſubtendunt.

§. 75.

Pariterque VI^ta ſic poteſt enunciari: Si duo triangula unum angulum uni æqualem habeant, circa hos æquales angulos autem unum latus unius ad unum latus alterius eandem habeat rationem quam alterum prioris latus ad alterum poſterioris; æquiangula erunt triangula; nominatim æquales ceteros habebunt angulos lateribus, qui ejusdem rationis termini ſunt, oppoſitos.

§. 76.

Ope VI^tæ demonſtrantur converſæ propoſitorum §. 61. ac parte ſecunda §. 63.: nempe quod (*Fig.* 2. 3. 4.) ſumtis in eadem recta tribus punctis A, B, D, & per duo eorum B, D ductis duabus parallelis BC, DE, ad $\left\{\begin{matrix}\text{easdem}\\\text{oppoſitas}\end{matrix}\right\}$ rectæ illius partes, prouti puncta B, D in ea jacent ad $\left\{\begin{matrix}\text{easdem}\\\text{oppoſitas}\end{matrix}\right\}$ partes puncti A, ſic ut ſit $BC : DE = AB : AD$; puncta A, C, E pariter jaceant in directum.

Junctis enim AC, AE rectis, ob angulum $ABC = ADE$ (I, 29.), & $BC : DE = AB : AD$ (ſupp.), eſt angulus $BAC = DAE$ (§. 75.): ideoque priori caſu rectarum AC, AE una in alteram incidit (Lib. I. Ax. 8. Conv.); poſteriori eædem rectæ lineæ in directum ſibi invicem ſunt (I, 15. Conv.).

Clavius (p. 548. ſq.) poſterius eodem modo, prius indirecte demonſtrat.

§. 77.

Sint (*Fig.* 18. 19.) AB, DE parallelæ; & M, N rectæ quæcunque inæquales. Utrinque ab punctis C, F, in parallelis AB, DE ubicunque

que ſumtis, abſcindantur in priore $CM = Cm = M$, in poſteriore $FN = Fn = N$; ita ut puncta M, N ſint ex una rectæ CF parte, m, n ex altera. Tres rectæ CF, MN, mn in eodem extra parallelas puncto G concurrent: &, ſi duo ſegmenta CK, FL ad easdem rectæ CF partes ab parallelis AB, DE abſciſſa ſunt ut M ad N; recta quoque KL altera eorum extrema K, L jungens per punctum G tranſibit.

Quippe rectis CF, MN ſe in puncto G ſecantibus (§. 64.),

eſt (§. 61.) $CM : FN = CG : GF$

Sed ob $Cm = CM$, $Fn = FN$, eſt (V, 7. Cor.) $Cm : Fn = CM : FN$

ac (hyp. & V, 7. 11.) $CK : FL = M : N = CM : FN$

Ideoque (V, 11.) tam $Cm : Fn$ quam $CK : FL$ $\Big\} = CG : GF$

& hinc (§. 76.) tam puncta m, n, G, quam puncta K, L, G jacent in directum.

§. 78.

Iisdem, quæ §. 77, ſumtis & factis (niſi quod rectæ M, N nunc etiam poſſunt eſſe æquales): tres rectæ CF, Mn, mN ſe in eodem intra parallelas puncto g ſecabunt; &, ſi ſegmenta Ck, Fl ad alternas rectæ CF partes ab parallelis AB, DE abſciſſa ſunt ut M ad N, recta etiam kl, altera eorum extrema k, l jungens, per punctum g tranſibit.

Rectis enim CF, Mn ſe in puncto g ſecantibus,

eſt (§. 63.) $CM : Fn = Cg : gF$

Atqui ob $Cm = CM$, $FN = Fn$, eſt (V, 7. Cor.) $Cm : FN = CM : Fn$

& (hyp. ac V, 7. 11.) $Ck : Fl = M : N = CM : Fn$

Quare (V, 11.) tam $Cm : FN$ quam $Ck : Fl$ $\Big\} = Cg : gF$

proinde (§. 76.) in directum ſunt tam puncta m, g, N, quam puncta k, g, l.

§. 79.

Per propoſita §. 64. ſq. 77. ſq. ſolvitur *Problema*, quod eſt *Locus* 1. & 2. *Libri prioris* Apollonii *de ſectione rationis* (p. 16.): Sint duæ rectæ parallelæ AB, DE poſitione datæ, & datum ſit in utraque illarum punctum (C, F); ſitque etiam ratio data (datæ ſcilicet ſint duæ rectæ M, N, eam invicem habentes rationem); præterea datum ſit eodem in plano punctum

ctum H extra (*Fig.* 18.), v
directum jacens cum punct
ab puncto dato H lineam
auferat ab ipsis segmenta d
inter se in ratione data M :

Ab recta enim AB ex
tur $CM =$ datæ M; ab recta
puncto in ipsa dato F: vel
ab illa, utrinque ab puncto
Mn vel mN rectis, iisqu
quæ utroque modo eadem
per utrumque punctum G,
DE in punctis K, L, k, l

$$\left.\begin{matrix} CK : FL \\ Ck : Fl \end{matrix}\right\} = CM : \left\{\begin{matrix} FN \\ Fn \end{matrix}\right.$$

Rectæ igitur illæ ab p
problemati; nec aliæ (§. 77

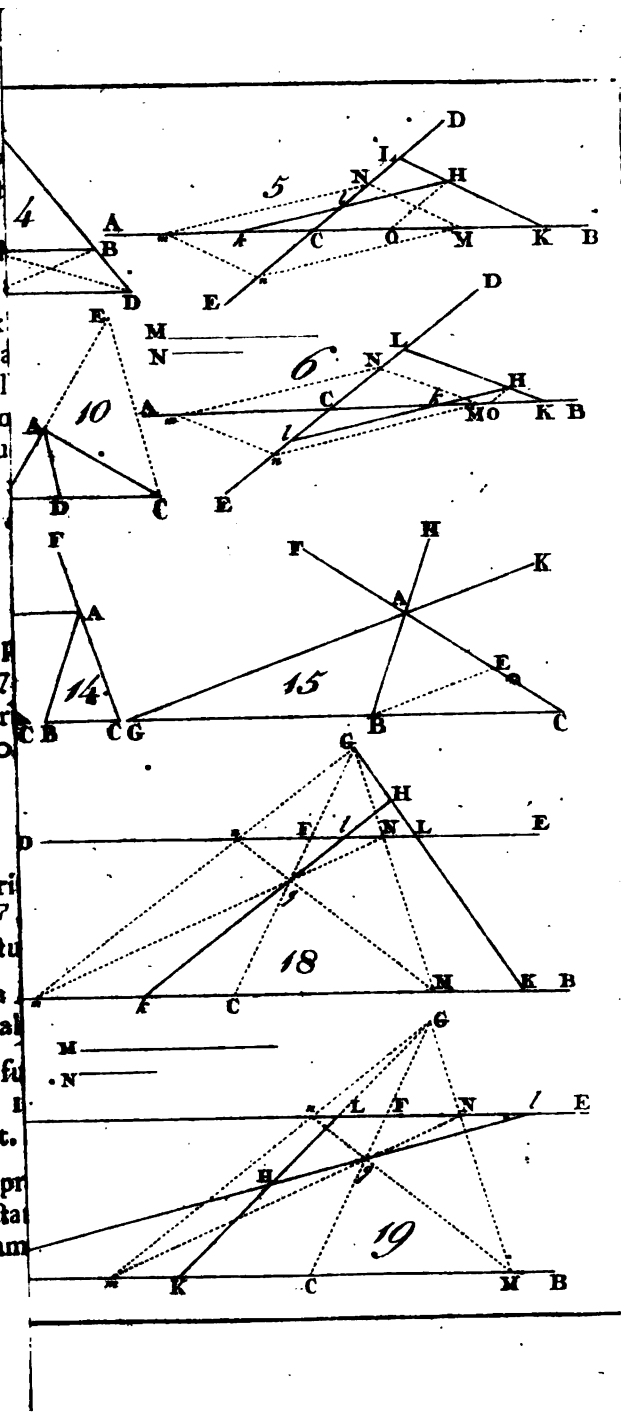
Et hanc quidem constr
diversam, in Scholio (p. 10

Si ratio data $M : N$ fueri
excludit): ob parallelas CF
nec nisi uno modo per rectu

Quodsi in *Fig.* 18. recta
positione, datis AB, DE; al

Si & ratio æqualitatis fu
lelas AB, DE datum (*Fig.* 1
rit: propositum effici nequit.

Ceteris casibus, quod pr
potest: uno quidem, si recta
ctum H transierit, per ipsam



§. 81.

Quæ prioribus §. 77. 78. partibus aſſeruntur, ſic etiam poſſunt enunciari: In quadrilateris, quorum duo latera ſunt parallela, recta bifariam hæc latera dividens, & diagonales figuræ in eodem intra quadrilaterum puncto ſe ſecant; &, ſi altera duo latera parallela non ſunt, hæc atque recta bifariam latera parallela dividens in eodem extra figuram puncto concurrunt.

§. 82.

In parallelogrammis igitur diagonales & rectæ bina latera oppoſita bifariam dividentes eodem in puncto ſe ſecant: quod ita fieri alio modo oſtenditur in demonſtratione XI, 39.

QA
31
.E89
P534

SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM SECUNDAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCCI.

PUBLICE DEFENDENT

CAROLUS WILHELM. HOCHSTETTER, *Leonbergenſis*,
CAROLUS GOTTLIEB MOERIKE, *Burgſtallenſis*,
IMMANUEL FERDINANDUS KOESTLIN, *Esslingenſis*,
GOTTLIEB FRIEDER. LOEFFLER, *Kircho-Teccenſis*,
CAROLUS BERNHARD. BILFINGER, *Kaltenweſthemenſis*,

CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.

QA
31
.E89
P534

Lib. Com
Magliano
2.18.28
1661

PROPOSITIO VII.

§. 83.

Rob. SIMSON duobus hac propositione enumeratis casibus tertium addit "omissum, & in demonstrationibus non raro occurrentem" (conf. *Euklids Data*. Stuttg. 1780. S. 62.), quo reliquorum angulorum alter sit rectus; & propositionem sic enunciat: "Si duo triangula unum angulum uni" angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportio-" nalia, & reliquorum utrumque simul minorem, vel non minorem" recto; vel si eorum alter rectus fuerit: æquiangula erunt triangula, &" æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia." (p. 185. 371. *Matthias* p. 78. sq.)

§. 84.

Demonstratio primi casus hac potest illatione finiri: quod (*Fig.* 22.) angulus AGB, qui (dem.) foret $= F <$ Rect. (hyp.), simul esset angulus exterior ad basin trianguli BCG æquicruri (dem.), ideoque $>$ Recto (I, 5. 17. 13.).

Secundi casus demonstratio ipsa neutrum angulum ABC, DEF altero posse esse majorem eo convincit, quod trianguli æquicruri angulus interior ad basin non possit non esse recto minor (I, 5. 17.).

Demonstratio tertii casus supplendi, si angulus ACB supponitur rectus, coincidit cum demonstratione secundi: si angulus F est rectus; ob angulum $AGB = F$ (dem.), redit ad demonstrationem casus primi.

Trium igitur casuum demonstratio nititur propositione: Trianguli æquicruri uterque ad basin angulus interior est recto minor; exterior, recto major (I, 5. 17. 13.).

§. 85.

Iisdem modis, ſub conditione æqualitatis laterum AB & DE, BC & EF, ceterisque ad angulos pertinentibus conditionibus, per I, 26. in locum VI, 4. ſubſtitutam oſtenditur: triangula eſſe omnimode æqualia, ſeu æqualia & ſimilia; quod BÆRMANNUS notat (*Euclidis Element. Libri* XV. Lipſ. 1743. p. 139.).

§. 86.

Quo præmiſſo, hæc VI, 7. eodem modo, quo præcedentes duæ, poteſt demonſtrari.

§. 87.

Triangula ſub conditionibus VIIme ſimilia eſſe, uti ex VI^{ta} (§. 73.) infertur. Eademque pariter illi, quæ huic (§. 75.), diſpoſitio laterum proportionalium applicatur.

§. 88.

Notari etiam poteſt, caſum primum §. 85. ſqq. ſemper exiſtere, ſi latera AB, DE, adjacentia angulis (ſupp.) æqualibus A, D, minora ſint alteris BC, EF: tum quippe anguli C, F, minores angulis A, D (I, 18.), neceſſario ſunt acuti (I, 17. Cor.).

§. 89.

Sit autem angulus F acutus, & $DE > EF$; ideoque etiam angulus D, quippe $< F$, acutus (I, 18. 17.). Ad rectam quamcunque BC conſtituantur anguli $C = F$, $CBA = E$. Erit & angulus $A = D$ (I, 32. Cor.): proinde anguli C, A acuti, & quidem $C > A$; ideoque $AB > BC$ (I, 19.): ac $AB : BC = DE : EF$ (VI, 4.).

Ex puncto B demittatur perpendiculum BH in latus AC. Intra triangulum ABC cadet BH (*Schol. in Lib. II. Elem.* §. 194.); & faciet $AH > CH$ (*ibid.* §. 223.).

Ab AH abſcindatur $HG = HC$, & jungatur BG recta. Erit $BG = BC$ (I, 4.); $AB : BG = AB : BC$ (V, 7.) $= DE : EF$ (dem. & V, 11.): ſed anguli $ABG < \begin{cases} ABC \\ E \end{cases}$, $AGB > \begin{cases} C \\ F \end{cases}$ (I, 16.).

Trian-

Triangula igitur *ABG*, *DEF* æquiangula non ſunt, nec proinde ſimilia; etiamſi habeant angulos *A*, *D* æquales, & latera circa angulos *ABG*, *E* proportionalia. Hoc vero etiam caſu reliquorum angulorum unus *AGB*, quippe exterior ad baſin trianguli *BCG* æquicruri (dem.), eſt recto major (§. 84.); alter *C* recto minor (conſtr. & ſupp.).

Unde patet neceſſitas tertiæ conditionis propoſitioni VI, 7. adjunctæ. (CLAVIUS p. 552.)

§. 90.

Sumta $BC = EF$, & reliquis uti §. 89. factis: præter angulum $A = D$, $BG = BC$ (§. 89.) $= EF$, foret $AB = DE$ (I, 26.); ceterum tamen triangulum *ABG* alteri *DEF* diſſimile & inæquale, quippe cui ſimile & æquale eſt triangulum *ABC* (§. 55.).

Hinc theorematis §. 85. determinatio intelligitur.

PROPOSITIO VIII.

§. 91.

Demonſtratio partis prioris in textu, quem habemus, *Elementorum* hæc traditur (*Fig.* 23.): Επει γαρ ιση εστιν η υπο ΒΑΓ γωνια τη υπο ΑΔΒ, ορθη γαρ εκατερα, και κοινη των δυο τριγωνων τουτε ΑΒΓ και της ΑΒΔ η προς τω Β· λοιπη αρα η υπο ΑΓΒ τη υπο ΒΑΔ εστιν ιση. Ισογωνιον αρα εστι το ΑΒΓ τριγωνον τω ΑΒΔ τριγωνω. Εστιν αρα ως η ΒΓ υποτεινουσα την ορθην της ΑΒΓ τριγωνου προς την ΒΑ υποτεινουσαν την ορθην της ΑΒΔ τριγωνου, ουτως αυτη η ΑΒ υποτεινουσα την προς τω Γ γωνιαν της ΑΒΓ τριγωνου προς την ΒΔ υποτεινουσαν την ισην τη προς τω Γ, την υπο ΒΑΔ της ΑΒΔ τριγωνου, και ετι η ΑΓ προς την ΑΔ υποτεινουσαν την προς τω Β γωνιαν κοινην των δυο τριγωνων. Το ΑΒΓ αρα τριγωνον τω ΑΒΔ τριγωνω ισογωνιον τε εστι, και τας περι τας ισας γωνιας πλευρας αναλογον εχει. Ομοιον αρα εστι το ΑΒΓ τριγωνον τω ΑΒΔ τριγωνω.

Similiterque partis alterius demonſtratio exponitur.

§. 92.

Rob. SIMSON (p. 371. *Matthias* p. 79.) monet: "Manifeſtum eſt," aliquem mutaſſe demonſtrationem, quam *Euclides* hujus propoſitionis de-"

"derat. Etenim auctor ejus, poſtquam demonſtraverat, triangula eſſe inter "ſe æquiangula, particulatim oſtendit, latera eorum circa æquales an- "gulos proportionalia eſſe; quaſi hoc non factum fuiſſet in propoſitione "quarta hujus Libri." [Addi poteſt: nec illationes particulares proportionum laterum cum enunciato & concluſione propoſitionis VI, 4. (§. 51.) conſentire.] "Hæc autem ſuperflua non inveniuntur in verſione" [*Campani* p. 145.] "ex lingua Arabica; & nunc omiſſa ſunt."

Oſtenſa nempe angulorum æqualitate, infert *Rob.* SIMSON (p. 187.): "Aequiangulum igitur eſt triangulum *ABC* triangulo *ABD*; quare latera "circa æquales angulos proportionalia habent (VI, 4.); & propterea inter "ſe ſimilia ſunt (Lib. VI. Def. 1.)."

§. 93.

AUSTIN (*Examination of the first ſix Books of Euclid's Elements.* Oxford 1781. pag. 68. ſeq.) *Corollarium* etiam propoſitioni adjunctum reprobat. Priore autem illius parte, ipſis ejus verbis pro more relata, demonſtrationes nituntur Prop. VI, 13; partis tertiæ Lemm. I. ante X, 34; ac Lemm. poſt XIII, 13. Contra ejusdem pars altera in demonſtrationibus partis primæ Lemm. I. ante X, 34; partis tertiæ Prop. XIII, 13; Lemm. poſteam; partis ultimæ Prop. XIII, 18; ac Prop. III, 6. *Collect. math. Pappi*, ab propoſitionibus VI, 8. 4. deducta traditur: ferius itaque, uſus illius frequentis cauſa tum locis citatis, tum alibi, ut in demonſtrationibus Propp. XIII, 14. 15. 16, addita (forſan reſtituta) eſt cenſenda.

Ceterum præter duas propoſitiones Corollario hoc enunciatas notari adhuc ſequentes merentur:

1°. Latus, quod trianguli rectanguli angulum rectum ſubtendit, eſt ad alterutrum ejus latus circa angulum rectum, uti reliquum ipſius latus circa angulum rectum eſt ad perpendiculum ex vertice anguli recti in hypotenuſam demiſſum; $BC : AC = AB : AD$, & alterne (VI, 4.).

2°. Unum trianguli rectanguli latus circa angulum rectum eſt ad alterum; uti, quod priori adjacet, ſegmentum hypotenuſæ, perpendiculo in eam ex vertice anguli recti demiſſo abſciſſum, eſt ad ipſum hoc perpendiculum; vel uti hoc perpendiculum eſt ad ſegmentum hypotenuſæ adjacens lateri poſteriori; $AB : AC = BD : AD = AD : DC$ (VI, 4.).

§. 94.

§. 94.

Cum anguli in ſemicirculo ſint recti (III, 31.): perpendicularis ab quocunque peripheriæ circuli puncto ad aliquam ejus diametrum ducta eſt media proportionalis inter ſegmenta diametri hujus ab perpendiculo illo facta; & quælibet circuli chorda per centrum non tranſiens media proportionalis eſt inter diametri per alterutrum ejus extremum ductæ ſegmentum ipſi adjacens, quod perpendiculum ab altero chordæ extremo in diametrum hanc demiſſum ab ea abſcindit, ipſamque diametrum (VI. 8. Coroll.).

PROPOSITIO IX.

§. 95.

Textus propoſitionis hujus ſic habet: Της δοθεισης ευθειας το προσταχθεν μερος αφελειν.

Εςω η δοθεισα ευθεια η AB (*Fig.* 24.)· δει δη της AB το προσταχθεν μερος αφελειν.

Επιτεταχθω δη το τριτον· και διηχθω τις ευθεια απο του A η AΓ, γωνιαν περιεχουσα μετα της AB τυχουσαν· και ειληφθω τυχον σημειον επι της AΓ το Δ, και κειφθωσαν τη AΔ ισαι αι ΔE, EΓ· και επεζευχθω η BΓ, και δια του Δ παραλληλος ηχθω τη BΓ η ΔZ.

Επει ουν τριγωνου του ABΓ παρα μιαν των πλευρων την BΓ ηκται η ZΔ· αναλογον αρα εστιν ως η ΓΔ προς την ΔA ουτως η BZ προς την ZA. Διπλη δε η ΓΔ της ΔA· διπλη αρα και η BZ της ZA· τριπλη αρα η BA της AZ.

Της αρα δοθεισης ευθειας της AB το επιταχθεν τριτον μερος αφηρηται το AZ· οπερ εδει ποιησαι.

§. 96.

Rob. Simson monet (p. 371. *Matthias* p. 80.): "Demonſtratio hujus" facta eſt in caſu particulari, in quo ſcilicet pars tertia abſcindenda eſt a" data recta" [contra tenorem tam propoſitionis, quam expoſitionis; & absque ulla mentione applicationis ſolutionis exhibitæ particularis ad ceteros caſus]; "quare minime videtur *Euclidis* eſſe. Præterea in quatuor magni-" tudinibus proportionalibus concludit auctor tertiam æquemultiplicem eſſe" "quartæ,

"quartæ, atque prima eſt ſecundæ; quod quidem in Libro V, ut eum "nunc habemus, nullibi oſtenſum eſt. Sed hoc, ut alia, aſſumit editor "ex confuſanea apud vulgus recepta proportionalium notione. Genera- "lem igitur & legitimam demonſtrationem hujus propoſitionis tradere "neceſſe fuit."

§. 97.

Hanc autem, præmiſſa in Libro V. (p. 145. *Matthias* p. [illegible] ſq.) demonſtratione propoſitionis D. notatæ: "Si fuerit prima ad ſecundam ut "tertia ad quartam, fueritque prima multiplex vel pars ſecundæ, erit "tertia eadem multiplex vel eadem pars quartæ"; ſic inſtruit (p. 188. *Matthias* p. 79.): "Sit data recta linea *AB* (*Fig.* 25.); oportet ab ipſa *AB* "imperatam partem abſcindere."

"Ducatur a puncto *A* quædam recta linea *AC*, quæ cum ipſa *AB* "angulum quemlibet contineat; ſumaturque in *AC* quodvis punctum *D*: "& quam multiplex eſt *AB* partis abſcindendæ, tam multiplex fiat *AC* "ipſius *AD*: deinde jungatur *BC*; & per *D* ipſi *BC* parallela ducatur *DE*."

"Itaque quoniam uni laterum trianguli *ABC*, videlicet ipſi *BC*, pa- "rallela ducta eſt *ED*: erit (VI, 2.) ut *CD* ad *DA*, ita *BE* ad *EA*; & "componendo (V, 18.) ut *CA* ad *AD*, ita *BA* ad *AE*. Eſt autem *CA* "multiplex ipſius *AD*. Ergo *BA* eadem eſt multiplex ipſius *AE*. Quare "quæcunque pars *AD* eſt ipſius *AC*, eadem pars erit *AE* ipſius *AB*. Eſt "igitur *AE* pars a recta *AB* abſcindenda."

§. 98.

Demonſtratio conſtructionis §. 97. absque ſubſidio propoſitionis illius *D*, jure ceterum in Libro V. deſideratæ, ſic etiam poteſt concinnari: ob parallelas *BC*, *ED* eſt

$AC : AB = AD : AE$ (§. 22.) $= n \times AD : n \times AE$ (V, 15. 11.),

denotante n numerum integrum, juxta quem data *AB* multiplex eſſe debet partis abſcindendæ. Quare cum ſit $AC = n \times AD$ (conſtr.); pariter eſt $AB = n \times AE$ (V, 14.).

Hoc fere modo demonſtrationem VI, 9. in Scholio ei adjuncto complet Bærmannus (p. 141.).

§. 99.

§. 99.

Eadem ratione ab data recta AB (*Fig.* 26.) abſcindetur ſegmentum, quod ad totam habeat rationem datam rectæ minoris M ad majorem $M+N$; vel quod ad ſegmentum reſiduum habeat rationem datæ rectæ M ad datam N; ſeu data recta AB ſecabitur in data ratione, rectæ nimirum datæ M ad datam N. (PAPPI *ad Libros de ſectione rationis Lemma I. Collect. math.* fol. 166. *Halley* p. XVIII. XLV. CLAVIUS p. 557. TACQUET *Elementa Euclidea geometriae illuſtrata a Guil.* WHISTON. Romæ 1745. Tom. I. p. 166. VI, 9. Coroll. I. ab *Whiſtono* adjunctum.)

Sub angulo enim quocunque ab eo datæ AB extremo A, cui adjacens ſegmentum datæ M debet eſſe homologum (§. 51.), ducta recta; & ex ea abſciſſis $AD=M$, $DC=N$, vel $AC=M+N$; tum per D acta rectæ CB parallela DE: fiunt

$AE:EB:AB=AD:DC:AC$ (§. 16. ſqq.) $=M:N:M+N$ (V, 7. 11.).

§. 100.

Pariter (*Fig.* 27. 28.) datæ rectæ AB alia ab puncto inde A in directum adjicitur, quæ ad ipſam habeat datam rationem, datæ nimirum rectæ M ad datam N.

Quippe vel (*Fig.* 27.) ab recta, ſub angulo quocunque per alterum datæ AB extremum B ducta, abſciſſis ad easdem partes $BC=N$, $CD=M$; vel (*Fig.* 28.) ab recta, ſub angulo quocunque per ipſum datæ AB extremum A ducta, abſciſſis ad partes oppoſitas $AC=N$, $AD=M$; & per punctum D acta rectæ $\left\{\begin{matrix} CA\ (Fig.\ 27.) \\ CB\ (Fig.\ 28.) \end{matrix}\right\}$ parallela DE ad occurſum uſque rectæ BA productæ in E (§. 15.): fit

$$EA:AB=\left\{\begin{matrix} DC:CB\ Fig.\ 27.\ (VI,2.) \\ DA:AC\ Fig.\ 28.\ (§.\ 23.) \end{matrix}\right\}=M:N\ (V,7.\ 11.).$$

§. 101.

Compoſita autem ex data AB eique ab extremo inde A in directum adjecta habebit ad $\left\{\begin{matrix} \text{datam} \\ \text{adjectam} \end{matrix}\right\}$ rationem datæ majoris rectæ M ad datam minorem N: ſi (*Fig.* 29. 30.) ab recta, ſub angulo quocunque per alterum datæ

datæ AB extremum B ducta, abſcinduntur $BD = M$, $\left.\begin{matrix} BC(Fig.\ 29.) \\ DC(Fig.\ 30.) \end{matrix}\right\} = N$; & rectæ AC per D parallela agitur DE ad occurſum uſque productæ BA in E (§. 15.). Sic quippe fit

$$\left.\begin{matrix} (Fig.\ 29.)\ EB : BA = DB : BC \\ (Fig.\ 30.)\ BE : EA = BD : DC \end{matrix}\right\} (\S.\ 17.) = M : N\ (V, 7.\ 11.)$$

Vel (*Fig.* 31. 32.) ab recta, ſub angulo quocunque per ipſum datæ AB extremum A ducta abſcindantur $\left.\begin{matrix} (Fig.\ 31.)\ AC \\ (Fig.\ 32.)\ AD \end{matrix}\right\} = N$, $\left.\begin{matrix} CD \\ DC \end{matrix}\right\} = M$; & rectæ BC per D ducatur parallela DE ad occurſum uſque productæ BA in E (§. 15.): quo fit

$$\left.\begin{matrix} (Fig.\ 31.)\ EB : BA = DC : CA \\ (Fig.\ 32.)\ BE : EA = CD : DA \end{matrix}\right\} (\S.\ 23.) = M : N\ (V, 7.\ 11.).$$

PROPOSITIO X.

§. 102.

Problema: Datam rectam AB ſecare in partes, quæ easdem mutuo habeant rationes, quas datæ rectæ L, M, N; ad heic propoſitum reducitur, ab recta indefinita, ſub angulo quocunque per alterum datæ AB extremum A ducta, abſcindendo $AD = L$, $DE = M$, $EC = N$ (*fig. verſ. Lorenz. vel Hauff.*).

Demonſtratio expeditior redditur præmiſſa propoſitione §. 29. ſq.

Solutio pariter ac demonſtratio pertinent ad rectam AC in partes quotcunque ſectam, vel ex propoſitis quotcunque rectis, datas rationes exhibentibus, componendam; ideoque ad efficiendam datæ rectæ AB ſectionem in partes quotcunqne, totidem propoſitæ AC ſegmentis, vel rectis datis, ordinatim proportionales.

Et generatim ex ipſis, vel immediate ex propoſitionibus VI, 2. ac §. 29. ſq. conſequitur: Si uni laterum alicujus trianguli (aut oppoſitis duobus parallelogrammi, parallelisve trapezii) plures quotcunque parallelæ agantur; omnia reliquorum laterum ſegmenta homologa eſſe proportionalia. (Tacquet p. 159. Bærmann p. 141.).

§. 103.

§. 103.

Quare, ſi æqualia fuerint unius trianguli lateris AC ſegmenta (*Fig.* 33.), alterius etiam lateris AB ſegmenta, rectis tertio lateri BC parallelis facta, erunt æqualia (*Rob. Simſon* Lib. V. Prop. A. p. 142. *Matthias* p. 48; vel V, 14.).

Idem immediate ſic oſtenditur. Ductis per puncta E, G, I, L lateri AC parallelis, ſunt (I, 34.) $EM = DF$, $GN = FH$, $IO = HK$, $LP = KC$. Quare $AD = EM = GN = IO = LP$, ſi lateris AC ſegmenta AD, DF, FH, HK, KC æqualia ſunt. Præterea (I, 29.) ſunt anguli $A = GEM = IGN = LIO = BLP$, & $AED = EGM = GIN = ILO = LBP$. Itaque (I, 26.) $AE = EG = GI = IL = LB$.

§. 104.

Recta igitur data AB in partes quotcunque æquales ſecabitur ſimili modo, quo propoſitum VI, 9. fiebat: ab recta nempe indefinita AZ, ſub angulo quocunque per alterum datæ AB extremum A ducta, ex puncto inde A abſcindendo tot ſegmenta æqualia cujuscunque longitudinis AD, DF, FH, HK, KC, in quot partes æquales ſecanda eſt data AB; tum rectæ BC, jungenti altera rectarum AB, AC extrema, parallelas agendo per puncta D, F, H, K (Clavius p. 554. ſq. Tacquet p. 167.).

§. 105.

Idem efficietur, rectæ AZ (§. 104.) parallelam pariter indefinitam BX ducendo per alterum datæ AB extremum B; & ab utraque AZ, BX, ex punctis inde A, B, tot abſcindendo ſegmenta cujuscunque longitudinis, utrinque æqualia, AD, DF, FH, HK, BQ, QR, RS, ST, in quot partes æquales ſecanda eſt data AB, demta una; tum rectas DT, FS, HR, KQ jungendo.

Ab recta enim AZ adhuc abſciſſo ſegmento $KC = AD = DF$ &c. $= BQ = QR$ &c., ut AC tot conſtet ſegmentis æqualibus, in quot partes æquales ſecanda eſt AB; & juncta BC recta: ob parallelas & æquales CK & BQ, CH & BR, CF & BS, CD & BT (conſtruct.), rectæ KQ, HR, FS, DT ſunt ipſi BC parallelæ (I, 33.); conſtructio igitur redit ad præcedentem (§. 104.); facilior vero eſt ejus praxis, quia pauciores du-

 cendæ

cendæ ſunt parallelæ. (MAUROLYCUS *De lineis horariis* Lib. II. Cap. 6. in *Opuſc. math.* Venet. 1575. p. 229. ſq. CLAVIUS p. 135. 555. ſq. TACQUET p. 167. ſq.)

§. 106.

Vel (*Fig.* 34. 35.) ab recta *MZ*, datæ *AB* parallela, tot abſciſſis æqualibus ſegmentis cujuscunque longitudinis *MD, DF, FH, HK, KN*, in quot partes æquales dividenda eſt *AB*; jungantur rectarum *AB, MN* extrema ad easdem partes ſita per rectas *AM, BN*: quæ parallelæ erunt, ſi fuerit *MN* = *AB* (I, 33.); ad partes autem minoris concurrent, ſi *MN* & *AB* prodeunt inæquales (*). Priori caſu rectis *MA, NB* per puncta *D, F, H, K* parallelæ (I, 34.); poſteriori, per hæc puncta & per punctum *C* concurſus rectarum *MA, NB* ductæ rectæ (§. 62.) propoſitam *AB* in partes impetratas æquales ſecabunt. (STEVINI *Liber quintus praxis geometricæ, de ſectione proportionali.* Prop. I. *Tom. II. mathematicorum Hypomnematum.* Lugd. Bat. 1605. p. 125. CLAVIUS p. 555. TACQUET p. 167.).

§. 107.

Conſtructiones §. 105. ſq. problematibus etiam §. 99 — 102. poſſunt applicari. (MAUROLYCUS p. 230. ſq. STEVIN l. c. Prop. 2. p. 125. ſq.)

§. 108.

Hinc porro ſequentia ſolvuntur *Problemata*, ad figurarum rectilinearum diviſiones pertinentia: in quibus rationes datæ inæqualitatis vel per rectas datas, quæ eas invicem habeant rationes, exhiberi; vel numeris (integris) exprimi, his autem deſignatæ, ſumtis cujuscunque rectæ multiplicibus juxta iſtos numeros, ad illas reduci ſupponentur.

§. 109.

(*) Ab majori enim, v. gr. *MN* (*Fig.* 36.), abſciſſa *MO* = minori *AB*, ſit *BO* rectæ *AM* parallela (I, 33.): ideoque anguli $M + MOB = 2$ Rect. (I, 29.); & ob ang. $N < MOB$ (I, 16.), anguli $M + N < 2$ Rect: quare ad partes horum angulorum concurrunt rectæ *MA, NB* (Lib. I. Ax. 11.).

§. 109.

Parallelogrammum *ABCD* (*Fig.* 37.) per rectas, alterutris ejus duobus oppositis lateribus *AB*, *DC* parallelas, dividere in partes quotcunque æquales, vel quæ datas invicem habeant rationes.

In tot partes æquales, vel rationes datas invicem habentes, secetur alterutrum *AD* reliquorum parallelogrammi laterum (§. 99. 102. sqq.); & per puncta divisionum *E*, *F* agantur lateribus *AB*, *DC* parallelæ.

Erunt parallelogramma *BE*, *GF*, *HD* uti rectæ *AE*, *EF*, *FD* (VI, 1.); ideoque vel æqualia, vel in rationibus datis.

Videatur EUCLIDIS, *ut quidam arbitrantur*, *de divisionibus Liber*; *vel*, *ut alii volunt*, MACHOMETI BAGDEDINI *Liber de divisionibus superficierum* ([a]), editioni Operum Euclidis Oxoniensi p. 665—684 adjunctus (Prop. XI. p. 673.). *Dav. Gregorius* (Præfat. fol. c. sq.) hæc de eo præfatur: "Scripsit *Euclides* Librum περι διαιρεσεων, de divisionibus, teste *Proclo* ([b]). *Johannes Dee* Londinensis cum Librum de divisionibus superficierum, *Machometo Bagdedino* (qui floruisse creditur seculo Christi decimo) vulgo adscriptum, ex Arabico (uti credo, licet hoc expresse non dicat) in Latinum verteret, & *Commandino* in lucem publicam edendum ([c]) commit-

(a) Qui triangula Prop. I—VI, quadrilatera Prop. VII — XVI, pentagona Prop. XVII—XXII, singula in duas partes secundum datam propositionem dividere docet.

(b) Lib. II. Cap. 5. p. 20. Πολλα μεν ουν και αλλα του ανδρος τουτου (Ευκλειδου) μαθηματικα συγγραμματα, θαυμαστης ακριβειας και επιστημονικης θεωριας μεστα. Τοιαυτα γαρ και τα οπτικα, και τα κατοπτρικα· τοιαυτα δη και αι κατα μουσικην στοιχειωσεις· ετι δε το περι διαιρεσεων βιβλιον.

(c) Quod effectum dedit Pisauri 1570 (*Kæstners Gesch. der Math.* I. B. S. 272. f.) sub titulo: *Mahometis Bagdadini* de superficierum divisionibus liber, *Jo. Dee* Londinensis & *Fed. Commandini* opera latine editus; & *Commandini* de eadem re libellus (*Büsch Encyklopädie der mathemat. Wiss.* Hamburg 1795. S. 77.). Hunc illo breviorem & magis universalem prædicat *Clavius* (*Geometria practica.* Mogunt. 1606. p. 236.).

utris ejus duo-
es quotcunque

bentes, fece-
9. 102. ſqq.);
parallelæ.
FD (VI, 1.);

ſonibus *Liber*
ſionibus *ſuper-*
84 adjunctus
de eo præfa-
nibus, teſte
nibus ſuper-
riſti decimo)
non dicat)
lendum (c)
commit-

I, pentagona
m propoſitio-

Math. I.

committeret, ſic ſcribit: "Cum ipſemet *Euclides* Librum de diviſionibus "ſcripſerit; nullum, qui ſub hoc titulo extet, alium novimus, nec, qui "jure meliori propter tractandi excellentiam *Euclidi* aſcribi queat, inve- "nire poſſumus ullum: nullius enim *Machometi* tantum in mathematicis "acumen adhuc perſpicere ex eorum, quæ habemus, monimentis potui- "mus, quantum in his ubique elucet problematibus. Denique in anti- "quiſſimo quodam geometrici negotii fragmento memini me expreſſis "verbis ex hoc Libello locum citatum legiſſe, veluti ex Euclidis certiſſimo "opere." Porro invenimus ad hæc verba Lib. II. *Procli* (d): Circulus namque & rectilineorum quodlibet in ratione diſſimiles dividi poteſt figuras, quod & ipſe *Euclides in Diviſionibus* pertractat; ipſius *Jo. Dee* manu ſcriptum: "Clarum hinc eſſe poteſt, Librum illum, ſive fragmentum, "de diviſionibus ſuperficierum, quem nos cum mathematico excellentiſ- "ſimo D. *Federico Commandino* Urbini reliquimus anno 1563, ipſius *Eu- "clidis* fuiſſe; quod tum conjiciebamus quidem, aliis argumentis adducti, "hujus loci immemores." Ex hoc ipſo tamen *Procli* loco colligit *Savi- lius* (e), hunc Librum non eſſe *Euclidis*: "Atqui nulla eſt" (inquit in Prælect. I.) "in illo *Bagdedini* Libello propoſitio, quæ figuras doceat in "ſimiles vel diſſimiles figuras dividere, ſed in datam proportionem divi- "dere." Inter contrarias graviſſimorum virorum opiniones de auctore hujus Libri, illum hoc in loco edendum judicavimus, quod & raro ad- modum reperiatur, & *Euclidem* auctorem magis ſapiat quam Optica & Catoptrica pro ejusdem libris habitæ. Illum Latinum tantum exhibe- mus: Græce enim, quod ſciamus, nullibi reperitur; neſcimus, an Ara- bice in aliqua Italiæ bibliotheca".

§. 110.

Triangulum datum *ABC* (*Fig.* 38.) in partes quotcunque æquales, vel

(d) ad Elem. I. Def. 14. p. 40. Το σχηματων εικοσιν εις διαφορα αυτων ειδη τεμνεται. Και γαρ ο κυκλος εις ανομοια τω λογω, και εικοσιν των ευθυγραμμων διαιρειται ισην· ο και αυτος ο στοιχειωτης εν ταις διαιρεσεσι πεπραγματευται, το μεν εις ομοια τα δοθεντα σχηματα διαιρων, το δε εις ανομοια.

(e) Prælectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis, Oxonii habitæ MDCXX. Oxonii 1621. p. 17. ſq.

vel quæ datas invicem habeant rationes, dividere per rectas, ex vertice anguli alicujus *A* trianguli ductas ad latus oppositum *BC*.

Latere hoc *BC* ea, qua triangulum dividi jubetur, ratione secto (§. 99. 102. sqq.); ab vertice *A* ad puncta sectionis *E*, *F* ducantur rectæ. Erunt (VI, 1.) triangula *ABE*, *AEF*, *AFC* uti lateris *BC* segmenta *BE*, *EF*, *FC*. (*De divisionibus Liber.* Prop. I. p. 667.).

§. 111.

Triangulum datum *ABC* (*Fig.* 39.) in partes quotcunque æquales, vel quæ datas invicem habeant rationes, dividere per rectas ex puncto dato *D* lateris alicujus *BC* trianguli ad ejus perimetrum ductas.

Ab puncto *D* ad verticem *A* anguli lateri *BC* oppositi ducatur *DA* recta; cui per alterum lateris *BC* extremum *B* parallela agatur *BE* ad occursum usque cruris alteri extremo *C* adjacentis *CA* producti (§. 15.): & jungatur *DE* recta. Erit triangulum *DAE* = *DAB* (I, 37.); itaque triangulum *DCE* = dato *ABC* (Lib. I. Ax. 2.).

Quare, uti in problemate præcedenti (§. 110.), basis *CE*, & triangulum *DCE* per rectas ex vertice *D* ductas, ea ratione secentur, qua triangulum *ABC* dividi imperatur. Per puncta autem sectionis basis *CE*, quæ in continuationem *AE* lateris *CA* cadunt, ut *G*, agantur rectis *AD*, *EB* parallelæ ad occursum usque lateris *AB*, ut *GH*. Erit, ducta *DH* recta, triangulum *DAH* = *DAG* (I, 37.); igitur quadrilaterum *DFAH* = triangulo *DFG* (Lib. I. Ax. 2.); pariterque, ob triangulum, *DAB* = *DAE* (dem.), triangulum *DHB* = *DGE* (Lib. I. Ax. 3.). Proinde *DCF*: *DFAH*: *DHB* = *DCF*: *DFG*: *DGE* (V, 7.) = *CF*: *FG*: *GE* (VI, 1.). (*De divisionibus Liber.* Prop. II. p. 667. sq.).

§. 112.

Vel (*Fig.* 40.) ea, qua triangulum *ABC* dividendum est, ratione secetur ipsum ejus latus *BC*, in quo punctum *D* datur; & per puncta sectionum *I*, *K* agantur rectæ *AD* parallelæ *IF*, *KH* ad occursum usque ceterorum trianguli laterum *AC*, *AB*. Ductis *DF*, *DH*, & *AI*, *AK* rectis; sunt (I, 37.) triangula *IFD* = *IFA*, *ADF* = *ADI*, *ADH* = *ADK*, *KHD* = *KHA*: ideoque (Lib. I. Ax. 2.) *DCF* = *ACI*, *DFAH* = *AIK*, *DHB* = *AKB*; & hinc

DCF: *DFAH*: *DHB* = *ACI*: *AIK*: *AKB* (V, 7.) = *CI*: *IK*: *KB* (VI, 1.).

(*La*

(*La quinta Parte del general Trattato de' numeri & misure, di Nicolo* TARTAGLIA. In Venetia MDLX. fol. 25. sq. CLAVII *Geometr. pract.* p. 262. sq.).

§. 113.

Triangulum datum *ABC* (*Fig.* 41.) in partes quotcunque æquales, vel quæ datas mutuo habeant rationes, dividere per rectas ex dato intra triangulum puncto *D* ad ejus perimetrum ductas.

Ab puncto hoc *D* ad vertices duorum quorumlibet trianguli angulorum *B*, *C* ductis *DB*, *DC* rectis parallelæ per tertii anguli verticem *A* agantur *AE*, *AF* ad occursum usque lateris *BC*, quod punctis *B*, *C* interjacet, utrinque producti (§. 15.); & jungantur rectæ *DA*, *DE*, *DF*. Erunt triangula $DBE = DBA$, $DCF = DCA$ (I, 37.); ideoque $DEF = ABC$ (Lib. I. Ax. 2.).

Rursus igitur ea, qua triangulum *ABC* dividi jubetur, ratione secetur recta *EF*, & triangulum *DEF* per rectas ex vertice *D* ductas (§. 110.). Tum per puncta sectionis, quæ extra latus *BC* ad partes verticis *B* cadunt, ut *G*, parallelæ rectis *DB*, *AE*; per ea autem, quæ ad partes verticis *C* cadunt, ut *I*, parallelæ rectis *DC*, *AF* agantur; ut *GK*, *IL*, ad occursum usque laterum *AB*, *AC*: & jungantur rectæ *DK*, *DL*.

Erunt triangula $DBK = DBG$, $DCL = DCI$ (I, 37.): proinde quadrilatera $DHBK = DHG$, $DHCL = DHI$ (Lib. I. Ax. 2.); pariterque, ob $DBA = DBE$, $DCA = DCF$ (dem.), triangula $DKA = DGE$, $DLA = DIF$ (Lib. I. Ax. 3.): itaque

$$DAK : DKBH : DHCL : DLA = DEG : DGH : DHI : DIF \text{ (V, 7.)}$$
$$= EG : GH : HI : IF \text{ (VI, 1.)}.$$

(*Neue und erleichterte Methode den Inhalt geradelinichter Flächen zu finden, und dieselben ohne Rechnung einzutheilen — von C. H.* WILKE. Halle 1757. S. 11. ff. *Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie von I. T.* MAYER. III Theil. Götting. 1783. S. 272. ff.)

§. 114.

Propositam quamlibet figuram rectilineam, cujus omnes anguli sunt convexi seu duobus rectis minores, in partes quotcunque æquales, vel quæ datas invicem habeant rationes, dividere per rectas, ex vertice designato

ſignato anguli alicujus figuræ, vel ex puncto in latere aliquo figuræ, aut intra figuram dato, ductas ad perimetrum figuræ.

Figura propoſita ſimilibus, ac §. 111. 113, operationibus, propoſitione I, 37. nixis, transformetur in triangulum, cujus vertex ſit punctum in perimetro figuræ, vel intra eam aſſignatum, & cujus baſis in directum jaceat alicui lateri figuræ. Baſis hæc ea, qua figura dividi præcipitur, ratione ſecetur (§. 99. 102. ſqq.): &, quæ in productum figuræ latus cadunt, puncta ſectionum ſimiliter ac §. 111. 113. ad perimetrum figuræ reducantur. (*De diviſionibus Liber.* Prop. VII. IX. XVII. XVIII. Wilke, Mayer, l. c.)

§. 115.

Exempli gratia ſit quadrilaterum *ABCD* dividendum

1°. per rectas ex vertice anguli ejus *C* ductas (*Fig.* 42.).

Diagonali *CA* per verticem *D* parallela agatur *DE* ad occurſum usque lateris *BA* producti in *E* (§. 15.); & jungatur *CE* recta. Erit triangulum *CAE* = *CAD* (I, 37.); & hinc triangulum *CBE* = quadrilatero *CBAD* (Lib. I. Ax. 2.).

Recta *BE* ea, qua figura *ABCD* dividenda eſt, ratione ſecetur: & per puncta ſectionis, quæ, ut *G*, in continuationem lateris *BA* cadunt, agantur rectis *CA*, *DE* parallelæ, ut *GH*, ad occurſum uſque lateris *AD*.

Ductis *CF*, *CG*, *CH* rectis, eſt triangulum *CAH* = *CAG* (I, 37.); hinc quadrilaterum *CFAH* = *CFG* (Lib. I. Ax. 2.), ac triangulum *CHD* = *CGE* (Lib. I. Ax. 3.): ideoque

CBF : *CFAH* : *CHD* = *CBF* : *CFG* : *CGE* = *BF* : *FG* : *GE*.

2°. Per rectas ex puncto *G*, dato in latere *BC*, ductas (*Fig.* 43.).

Rectæ *GD* per *C* parallela ducatur *CF* ad occurſum uſque lateris *AD* producti in *F*; per quod agatur rectæ *GA* parallela *FE* ad occurſum uſque lateris *BA* producti in *E* (§. 15.). Erunt (I, 37.) triangula *GDF* = *GDC*, *GAE* = *GAF* = *GADC*; ideoque *GBE* = quadrilatero *ABCD*.

Trianguli *GBE* baſis *BE* ſecetur ea ratione, qua *ABCD* dividi jubetur; & per puncta ſectionum, ut *I*, *K*, quæ in continuationem *AE* lateris *BA* cadunt, agantur rectis *GA*, *FE* parallelæ, ut *IL*, *KM*, ad occurſum uſque rectæ *AF*, ac denuo per puncta hujus occurſus, quæ,

ut

ut M, in continuationem DF lateris AD cadunt, parallelæ ducantur rectis GD, CF, ut MN, ad occurſum uſque lateris CD.

Junctis GH, GL, GN, ac GI, GK, GM rectis, ſunt (I, 37.) triangula $GAL = GAI$, $GAM = GAK$, $GDN = GDM$; unde (Lib. I. Ax. 2.) quadrilaterum $GHAL = GHI$, pentagonum $GHADN = GHAM = GHK$; & (Lib. I. Ax. 3.) quadrilaterum $GLDN = GIK$, triangulum $GNC = GKE$: ideoque

$$GBH : GHAL : GLDN : GNC = GBH : GHI : GIK : GKE = BH : HI : IK : KE$$

3°. Per rectas ex puncto G intra quadrilaterum $ABCD$ dato ductas (*Fig.* 44.)

Ductis ad vertices angulorum quadrilateri rectis GA, GB, GC, GD: per punctum C agantur rectis GB, GD parallelæ CF, CH ad occurſum uſque productorum laterum AB, AD, in F, H; & per hoc agatur rectæ GA parallela HE ad occurſum uſque lateris BA producti in E (§. 15.). Junctis GF, GH, GE rectis, erunt (I, 37. & Lib. I. Ax. 2.) triangula $GBF = GBC$, $GDH = GDC$, $GAE = GAH = GADC$, $GEF = ABCD$.

Trianguli igitur GEF baſis EF ſecetur ea ratione, qua dividendum eſt quadrilaterum $ABCD$: & per puncta ſectionum, quæ, ut I, in continuationem BF lateris AB cadunt, ducantur rectis GB, CF parallelæ, ut IN, ad occurſum uſque lateris BC; per puncta vero, quæ, ut L, M, in continuationem AE lateris BA cadunt, agantur rectis GA, HE parallelæ, ut LO, MP, ad occurſum uſque rectæ AH; ac denuo per puncta hujus occurſus, quæ, ut P, in continuationem DH lateris AD cadunt, parallelæ ducantur rectis GD, CH, ut PQ, ad occurſum uſque lateris CD.

Ductis GN, GK, GO, GQ, ac GI, GL, GM, GP rectis; ſunt (I, 37.) triangula $GBN = GBI$, $GAO = GAL$, $GAP = GAM$, $GDQ = GDP$: unde (Lib. I. Ax. 2.) quadrilatera $GKBN = GKI$, $GKAO = GKL$, pentagonum $GKADQ = GKAP = GKM$; ac (Lib. I. Ax. 3.) $GNC = GIF$, $GODQ = GLM$, $GQC = GME$: proinde

$$GCN : GNBK : GKAO : GODQ : GQC = GFI : GIK : GKL : GLM : GME = FI : IK : KL : LM : ME.$$

§. 116.

Propoſitam quamlibet figuram rectilineam, cujus omnes anguli ſunt convexi, in partes quotcunque æquales, vel quæ datas invicem habeant ratio-

rationes, dividere per rectas, ex figuræ lateris alicujus, ea ratione, qua figura dividi jubetur, ſecti, punctis ſectionum ductas ad perimetrum figuræ.

Si figura propoſita fuerit triangulum; rectæ, ad puncta ſectionum lateris aſſignati ex vertice anguli oppoſiti ductæ, efficiunt, quod jubetur (§. 110.).

Ceteri caſus ad hunc reducuntur repetita propoſitionis I, 37. applicatione: qua primum figura propoſita in triangulum lateri figuræ aſſignato inſiſtens transformatur; tum trianguli hujus partibus, ſegmentis lateris illius inſiſtentibus, æqualia ſpatia ab figura propoſita abſcinduntur. Priori adhibentur rectæ, diagonalibus figuræ ex uno lateris aſſignati extremo ductis parallelæ; poſteriori aliæ, rectis ad puncta ſectionum lateris aſſignati ex verticibus angulorum figuræ ductis parallelæ.

Dividendum ex. gr. ſit pentagonum *ABCDE* (*Fig.* 45.) per rectas ex punctis ſectionum lateris *AB* ductas.

Ductis ex altero lateris hujus extremo *A* diagonalibus *AD*, *AC*: priori *AD* per verticem *E* trianguli *ADE*, quod ea ab figura abſcindit, parallela agatur *EN* ad occurſum uſque lateris adjacentis *CD* producti in *N*; alteri autem *AC* per hoc punctum *N* parallela ducatur *NF* ad occurſum uſque lateris producti *BC* in *F* (§. 15.). Sic, ductis *AN*, *AF* rectis, fiunt (I, 37. & Lib. I. Ax. 2.) triangula *ADN* = *ADE*, *ACF* = *ACN* = *ACDE*, *ABF* = *ABCDE*.

Tum latere *AB* ea ratione, qua figura *ABCDE* dividenda eſt, in punctis ut *G*, *H*, ſecto (§. 99. 102. ſqq); rectis *CG*, *CH* per verticem *F* trianguli *ABF* parallelæ agantur *FI*, *FK* ad occurſum uſque rectæ *CN*: punctaque hujus occurſus, quæ, ut *K*, in continuationem *DN* lateris *CD* cadunt, ad perimetrum figuræ reducantur, ductis per ipſa rectæ *DH* parallelis, ut *KL*, ad occurſum uſque lateris *DE*.

Ita ductis *GI*, *HK*, *HL* rectis, erunt (I, 37. & Lib. I. Ax. 2.) *GCI* = *GCF*, *GBCI* = *GBF*; *HDL* = *HDK*, *HCDL* = *HCK* = *HCF*, *HBCDL* = *HBF*; ideoque etiam (Lib. I. Ax. 3.) *HGIDL* = *HGF*, *AHLE* = *AHF*: proinde

AHLE : *HGIL* : *GBCI* = *FAH* : *FHG* : *FGB* = *AH* : *HG* : *GB* (Wilke S. 13. ff. Mayer S. 182. f. 268. ff.).

§. 117.

Per verticem F trianguli FAB agatur baſi ejus AB parallela; cui producta EN (diagonali AD per conſtr. parallela) occurrat in puncto M (§. 15.).

Ductis MA, MB, MH, MK, MD rectis, & hac ad occurſum uſque lateris AB in R continuata: fiunt triangula $MAB = FAB$ (I, 37.) $= ABCDE$ (§. 116.); $MAD = EAD$ (I, 37.), & hinc (Lib. I. Ax. 2.) $MAR = EDRA$: ideoque (Lib. I. Ax. 3.) $MRB = DCBR$.

Porro, ob triangulum $HCK = HCF$ (§. 116.), eſt $KCBH = FBH$ (Lib. I. Ax. 2.) $= MBH$ (I, 37.).

Quare $MBH - MRB = KCBH - DCBR$ (Lib. I. Ax. 3.), h. e. $MRH = KDRH$; ac rurſus (Lib. I. Ax. 3.) $MDH = KDH$.

Parallelæ igitur ſunt MK, DH (I, 40.); & punctorum, ut K, quæ in continuationem DN lateris CD cadunt, ad perimetrum figuræ reductio (§. 116.) peragitur rectis ex puncto M per puncta illa ad occurſum uſque lateris DE ductis, ut MKL (Wilke l. c. Mayer S. 260. ff.).

§. 118.

Solutiones problematum §. 114. ſqq. multis etiam figuris rectilineis, quarum unus pluresve anguli ſunt concavi ſeu duobus rectis majores, immediate poſſunt applicari. Præparationes transformationesque adhibendas ceteris caſibus docent Wilke S. 6. f., præſertim Mayer S. 186. f. 189. ff. 195. ff. 270. ff. 274.

PROPOSITIONES XI. XII.

§. 119.

Ad inveniendam tertiam duabus, & quartam tribus datis rectis proportionalem, ſegmenta his æqualia etiam proportionibus §. 17. ſq. §. 22. ſqq. demonſtratis conformiter ab cruribus anguli aſſumti, vel ad verticem ei oppoſiti, poſſunt abſcindi.

Sic factis (*Fig.* 46.) $DG = A$, $DH = C$, & juncta GH recta: quarta proportionalis tribus A, B, C fit

HF

HF pro $GE = B$, per E ducta EF
HK pro $GI = B$, per I ducta IK
DM pro $DL = B$, per L ducta LM
DO pro $DN = B$, per N ducta NO
} rectæ GH parallelæ; scilicet {
$DG : GE = DH : HF$ (VI, 2.)
$DG : GI = DH : HK$ (§. 17. 24.)
$DG : DL = DH : DM$ (§. 17.)
$DG : DN = DH : DO$ (§. 23.)

Et factis (*Fig.* 47.) $DG = A$, $DP = B$, ac juncta GP recta; quarta proportionalis tribus A, B, C fit

PR pro $GQ = C$, per Q ducta QR
PT pro $GS = C$, per S ducta ST
DV pro $DU = C$, per U ducta UV
DX pro $DW = C$, per W ducta WX
} rectæ GP parallelæ; scilicet {
$DG : DP = GQ : PR$ (§. 22.)
$DG : DP = GS : PT$ (22. 24.)
$DG : DP = DU : DV$ (§. 22.)
$DG : DP = DW : DX$ (§. 23.)

§. 120.

Juxta præcedentium modorum priores (*Fig.* 46.), quatuor rectarum proportionalium prima & secunda in uno sunt anguli assumti vel propositi crure, tertia & quarta in altero. Primæ scilicet ac secundæ rectæ datæ A, B æquales in eodem crure anguli assumti D abscinduntur: prima quidem ab vertice inde anguli D; secunda ab alterutro inde rectæ $DG = A$ extremo, ad easdem vel oppositas hujus partes: tertiæ datæ C æqualis DH in altero anguli D crure, rursus, ut prima, inde ab vertice ipsius D abscinditur; ipsiusque alterum extremum H cum primæ extremo altero G connectitur; & huic rectæ per extremum alterum secundæ B agitur parallela; quæ ab crure, in quo est tertia C, quartam quæsitam abscindit. Cruris nempe hujus segmentum similiter situm cum cruris alterius segmento, quod secundæ B æquale est, quartam hanc exhibet (§. 25.).

Juxta posteriores (*Fig.* 47.), prima & tertia in uno sunt anguli assumti crure, secunda & quarta in altero. Primæ nimirum & secundæ rectæ datæ æquales in diversis anguli assumti cruribus, utraque ab ejus vertice D inde, abscinduntur, $DG = A$, $DP = B$; earumque extrema altera jungens recta GP ducitur: tertia C eodem in crure cum prima, ab alterutro inde segmenti $DG = A$ extremo, ad easdem vel oppositas ipsius DG partes, abscinditur; ac per alterum segmenti $= C$ extremum parallela rectæ GP ducitur; quæ ab crure, in quo est $DP = B$, quartam quæsitam abscindit. Cruris scilicet hujus segmentum similiter situm cum cruris alterius segmento, quod tertiæ C æquale est, quartam hanc exhibet (§. 25.).

Breviter: priores modi in posteriores transpositione alterna secundæ ac tertiæ rectæ datæ juxta V, 16. transformantur.

§. 121.

Ut hinc prima & quarta, inde secunda & tertia in eodem sint anguli propositi D crure:

1°. vel (*Fig.* 48.) ab vertice ejus inde ex uno illius crure abscissa $DG = A$, ex altero $DH = C$, & juncta GH recta; tum ex hoc altero crure, pariter ab vertice D inde, ad easdem cum DH, vel ad oppositas partes abscissa $\left\{\begin{matrix} DL \\ DN \end{matrix}\right\} = B$; fieri debet angulus $\left\{\begin{matrix} DLM \\ DNO \end{matrix}\right\} = DGH$: unde, ob $DG : \left\{\begin{matrix} DL \\ DN \end{matrix}\right\} = DH : \left\{\begin{matrix} DM \\ DO \end{matrix}\right.$ (§. 52.), erit DM vel DO quarta proportionalis desiderata.

2°. Vel (*Fig.* 49.) ab vertice D inde ex uno anguli propositi crure abscissa $DG = A$, ex altero $DP = B$, & juncta GP recta; tum ex hoc altero crure, rursus ab vertice D inde, ad easdem cum DP, vel ad oppositas partes, abscissa $\left\{\begin{matrix} DU \\ DW \end{matrix}\right\} = C$; fieri debet angulus $\left\{\begin{matrix} DUV \\ DWX \end{matrix}\right\} = DGP$: unde, ob $DG : DP = \left\{\begin{matrix} DU : DV \\ DW : DX \end{matrix}\right.$ (VI, 4.), erit DU vel DX quarta proportionalis quæsita.

Qui duo modi pariter se invicem habent ac duo præcedentes §. 120.

§. 122.

In recta positione data AB (*Fig.* 5. 6.), ab puncto inde O in ipsa dato, quarta proportionalis tribus rectis datis N, M, F sic etiam abscinditur.

Per aliud quodcunque punctum C rectæ AB ducta DE recta sub angulo quocunque, & per punctum datum O acta ipsi DE parallela; ab hac abscindatur $OH =$ tertiæ datæ F: ab puncto autem C inde, ad alterutras ejus partes, ex rectis DE, AB abscindantur $\left\{\begin{matrix} CN \\ Cn \end{matrix}\right\} =$ primæ N, $\left\{\begin{matrix} CM \\ Cm \end{matrix}\right\} =$ secundæ M: ac per H parallela agatur HK rectis $\left\{\begin{matrix} MN \\ m\ n \end{matrix}\right.$; vel Hk paral-

parallela rectis $\begin{Bmatrix} Mn \\ mN \end{Bmatrix}$: hæ quippe invicem ſunt parallelæ, pariter ac MN, mn (§. 26.).

Ob $\begin{matrix} CN : CM \\ Cn : Cm \end{matrix} \Big\} = HO : OK$, $\begin{matrix} CN : Cm \\ Cn : CM \end{matrix} \Big\} = HO : Ok$ (I, 15. 29. VI, 4.), erunt OK, Ok quartæ proportionales deſideratæ.

§. 123.

Ut, quod *Locus 3. Libri primi* APOLLONII *de ſectione rationis* (§. 27.) jubet, recta $\begin{Bmatrix} HK \\ Hk \end{Bmatrix}$, per datum punctum H ducta, ab rectis poſitione datis AB, DE, ſe mutuo in C ſecantibus, auferat ſegmenta puncto huic C adjacentia, quæ ſint inter ſe in ratione data M ad N: ob $CK : CL = OK : OH$, $Ck : Cl = Ok : OH$ (I, 29. VI, 4.), ſi rectæ DE parallela per punctum H agitur HO ad occurſum uſque rectæ AB in O (§. 15.); pariter eſſe debent $M : N = \begin{Bmatrix} OK \\ Ok \end{Bmatrix} : OH$ (V, 11.),

& inverſe $N : M = HO : \begin{Bmatrix} OK \\ Ok \end{Bmatrix}$ (V, 4. Cor.).

Ob datum autem punctum H, & poſitione datas AB, DE, dantur recta HO & punctum O (I, 31.). Ad ſolutionem igitur problematis præcedentis (§. 122.), atque ita ad conſtructionem *Hallejanam* §. 27. expoſitam, analyſis heic tradita, qua *Apollonius* utitur, inventionem rectarum $\begin{Bmatrix} OK \\ Ok \end{Bmatrix}$, proinde punctorum $\begin{Bmatrix} K \\ k \end{Bmatrix}$ redigit, ex quibus per datum punctum H rectæ deſideratæ $\begin{Bmatrix} KL \\ kl \end{Bmatrix}$ ſunt ducendæ.

§. 124.

Tertiæ proportionali duabus rectis datis inveniendæ crebro commode adhibetur Corollarii Prop. VIII. pars altera.

Nempe 1°. ſi prima recta data major eſt ſecunda: in ſemicirculo ſuper illa, ut BC (*Fig.* 23.), deſcripto, ex alterutro inde ejus extremo B, aptabitur recta BA ſecundæ datæ æqualis (IV, 1.). Tum ex altero hujus extre-

extremo A in diametrum BC demissum perpendiculum AD tertiam proportionalem imperatam BD ab majore data BC abscindit (§. 94.)

2°. Si prima recta data minor est secunda: super illa, ut BD, tanquam catheto, triangulum constituatur rectangulum ADB, cujus hypotenusa BA sit datæ secundæ rectæ æqualis (ut in II, 14. III, 17.). Tum huic BA in ejus extremo A ductum perpendiculum AC ab producta BD (cui, ob angulum B acutum, ideoque angulos $B + BAC < 2$ Rect. per Lib. I. Ax. 11. ad has partes occurrit) tertiam proportionalem desideratam BC abscindit (VI, 8. Coroll.).

Constructiones has, quæ primam ac tertiam ab eodem puncto in directum protensas exhibent, docet PAPPUS *Collect. math.* Lib. III. Prop. 7. 8. fol. 8. b. sq.

§. 125.

Si tertia primæ in directum est adjicienda, Corollarii Prop. VIII. pars prior illi designandæ inservit.

Primæ nimirum rectæ datæ, ut BD, in extremo ipsius D, ad angulum rectum ducta DA æquali secundæ; tum junctæ BA rectæ in A constituto perpendiculo AC, & ad occursum usque in C cum producta BD continuato: fit (VI, 8. Cor.) DC tertia proportionalis quæsita. (CLAVIUS p. 560. sq. TACQUET p. 168.

PROPOSITIO XIII.

§. 126.

Semicirculus etiam describi potest super data majori recta, ut BC; & ab hac abscindi BD æqualis datæ minori. Tum ab hujus extremo D ducta rectæ BC perpendiculari DA ad occursum usque semicirculi in A, & juncta BA recta; erit hæc (§. 94.) media proportionalis quæsita. (PAPPUS Lib. III. Prop. 6. fol. 8. b.)

DEFINITIO II.

§. 127.

Definitio hæc ex opposito primæ: Ομοια χηματα ευθυγραμμα εστιν, σσα

οσα τας τε γωνιας ισας εχει κατα μιαν, και τας περι τας ισας γωνιας πλευρας αναλογον; sic enunciatur: Αντιπεπονθοτα δε χηματα εστιν, οταν εκατερω των χηματων ηγουμενοι τε και επομενοι οροι ωσιν; & vertitur: Reciprocæ figuræ ſunt, quando in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint. (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τα Σωζομενα. Ex recenſione *Dav.* GREGORII, p. 113; CLAVIUS, p. 530; & plerique poſt eum, nonnulli etiam ante ipſum, interpretes.)

§. 128.

In ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Ετοιχειων Βιβλ. ια. Baſil. 1533. p. 68. loco οροι legitur λογοι. Eademque lectio reperitur in *Elementorum* editionibus (textum Græcum definitionum & enunciatorum propoſitionum adjunctum habentibus, vel eum ſolum cum verſione Latina exhibentibus) ORONTII FINEI (Paris. 1544. p. 119. primum 1536.), *Joach.* CAMERARII (Lipſ. 1577. p. 214. primum 1549.), SCHEUBELII (Baſil. 1550. p. 270.), PELETARII (Lugd. 1610. p. 242. primum 1557.), DASYPODII (Argentor. 1564. p. 46. 1570. p. 18.). Et in excerptis Εκτων τε ΗΡΩΝΟΣ (*) περι των της γεωμετριας ονοματων, a *Daſypodio* editis (Argentor. 1570. p. 45.), habetur: Αντιπεπονθοτα δε χηματα εστιν, εν οις εν εκατερω των χηματων ηγουμενοι τε και επομενοι λογοι εισιν.

§. 129.

Petr. RAMUS (*Schol. mathemat.* Francoſ. 1599. p. 227. primum Baſil. 1569.) jam obſervat: "Secunda definitio definit reciprocas figuras ob-" ſcure,

(*) Junioris; qui vulgo ſub Heraclio imperatore ſeculo poſt C. N. ſeptimo vixiſſe juxta *Joh. Blancanum* traditur (*Voſſius De univ. matheſ. natura.* Amſtel. 1650. p. 294. *Heilbronneri Hiſt. matheſ. univ.* Lipſ. 1742. p. 397. ſq.). Sed quæ de locis ſtellarum quarundam fixarum *Heron* in *Geodæſia* (Venet. 1572. p. 70. b. ſq.) refert, eas a Ptolemæi temporibus ad ſuam uſque ætatem gradibus octo (non ſeptem, ut *Blancanus* vult) progreſſas eſſe ſupponunt: nec loca illa obſervaſſe, ſed ex catalogo *Ptolemæi* (*Almag.* Lib. VII. Cap. 5.), juxta hujus ſententiam (l. c.), quod per unum gradum in centum annis ſtellæ moveantur, collegiſſe *Heron* videtur. Quare ſeculo demum poſt C. N. decimo vixiſſe erit cenſendus.

"ſcure, quando antecedentes & conſequentes rationes inſunt in utraque "figura — Atqui in hac definitione verbum λογοι, rationes, videtur ir- "repſiſſe pro ὁροι, termini — Poteſt tamen λογοι, ſeu rationes retineri: "ut intelligas, rationem utramque eſſe non totam in altera figura; ſed "partim in hac, partim in illa: quia terminus primus primæ rationis eſt "in prima figura, ſecundus eſt in ſecunda; ſecundæ autem primus eſt "in ſecunda, ſecundus in prima."

§. 130.

CANDALLA (*Euclidis — Elementa Libris XV. ad germanam geometriæ intelligentiam e diverſis lapſibus temporis injuria contractis reſtituta* — Lugd. 1578. p. 112. ſq.) legi vult λογων; ac vertit: Reciprocæ figuræ ſunt, quando in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum fuerint; ſubjuncto monito: "Hujus diffinitionis texturam altetare cogimur. Lon- "ge etenim a vero eam deſcripſit *Zambertus*, dicens reciprocas figuras, "quarum termini rationales (cujus vice Græca vox, rationum loco, ra- "tiones ſcribit) fuerint; nec, quid ſit rationalem eſſe, dixit. Quare "loco pluralis nominativi λογοι genitivum λογων dixiſſe debuerat, ut "binarum rationum antecedens & conſequens utramque figuram poſſide- "rent: ſcilicet antecedens primæ & conſequens ſecundæ, priorem; con- "ſequens vero primæ & antecedens ſecundæ rationum, poſteriorem figu- "ram deſignarent."

§. 131.

Rob. SIMSON, præeuntibus *Alph. Borellio* (*Euclides reſtitutus*. Piſis 1658. p. 161.), & *Clavio* in Scholio huic Definitioni 2. Lib. VI. (p. 530.) ſubjuncto, eam ad parallelogramma & triangula reſtringit, ſicque enunciat (p. 174.): Reciprocæ figuræ, triangula ſc. & parallelogramma, ſunt, quando circa duos angulos latera ita ſunt proportionalia, ut latus primæ ſit ad latus ſecundæ, ut reliquum ſecundæ latus ad latus reliquum primæ; in *Notis* autem (p. 370. *Matthias* p. 75.) monet: "Definitio ſecunda "non videtur *Euclidis* eſſe, ſed cujusdam imperiti. Nulla enim figura- "rum reciprocarum mentio fit ab *Euclide*, neque, quantum ſcio, a quo- "cunque alio geometra. Obſcure enunciata eſt: quare eam magis clare exhi-

exhibuimus. Vice autem ejus, quæ ſequitur, ponenda videtur: Duæ" magnitudines dicuntur eſſe reciproce proportionales duabus aliis, quando altera priorum eſt ad alteram poſteriorum, ut reliqua poſteriorum ad" reliquam priorum."

Similemque poſteriori definitionem WHISTON vulgari (§. 127.) ſubjungit (p. 156.).

§. 132.

In *Euclidis* de rationibus ſermone alias μεγεθη ſolum (diſerte nominata, vel ſubintellecta) ηγουμενα, επομενα occurrunt (Lib. V. Defin. 12 — 17.).

Hinc, quod *Candalla* proponit (§. 130.), legi in Defin. 2. Lib. VI. ηγουμενα τε και επομενα (των) λογων requireret.

Ορoι ut terminos rationis ſignificans invenitur quidem in Lib. V. Defin. 9.: Αναλογια δε εν τριτιν οροις ελαχιστοις εσιν; ea vero æque ac præcedens 8.: Αναλογια δε εσιν η των λογων ομοιοτης, quam ut additamentum ſpurium notavit *Rob. Simſon* (p. 132. 341.), eſt ſuſpecta: & uſum illum vocis ορoι ſequiorem eſſe indicant, quæ *Iſ. Barrow* (*Lectiones habitæ in ſcholis publ. Acad. Cantabrigienſis anno* 1666. Lond. 1684. p. 197. ſq. 214.) ex *Theone Smyrnæo* ac *Nicomacho Geraſeno*, ſcriptoribus ſecuto poſt C. N. primo labenti haud anterioribus (*Voſſius* p. 38. 162. 94. *Heilbronner* p. 333. 309. ſq.), ejus declarandi gratia affert (*).

Sive

(*) Lect. II. p. 197. ſq. Terminum vocant Mathematici horum correlatorum [duorum homogeneorum, quorum comparationem ratio innuit] quantorum utrumvis. Ορος (inquit Theon Smyrnæus) ο το καθ εκαστον αποφαινων ιδιωμα των λεγομενων, οιον αριθμος, μεγεθος, δυναμις, ογκος, βαρος; terminus eſt, qui peculiarem dictorum naturam ſeu proprietatem exprimit, ut numerus, magnitudo, moles, pondus. Et alibi clarius: Ορους δε λεγομεν τα ομογενη η ομοειδη λαμβανομενα εις συγκρισιν; terminos dicimus, quæ cum genere vel ſpecie conveniant, in comparationem adſumuntur.

Lect. III. p. 214. Hinc adverto proxime, τον Στοιχειωτην, cum geometricæ materiæ dicaret hoc Elementum, magnitudinum ſolummodo ratio-

 nem

Sive λογοι, ſive λογων, ſive ορoι legatur; Definitio illa 2. ambigue, quod docere debebat, exponit. *Rami* quidem explicatio lectionis λογοι (§. 129.) reciprocas figuras ab ſimilibus diſtinguit, quatenus in his ordo laterum proportionalium Euclideus (§. 51.) ſervatur; non autem, quatenus alterna, quæ dicitur, poſitio ei applicatur (§. 52.): ita enim pariter *utraque ratio* non tota eſt in altera figura. Priore autem ordine ſervato in utraque etiam duarum ſimilium figurarum ſunt antecedentes & conſequentes *rationum termini.*

Nexus cum Defin. 1. ſecundam pariter ad figuras planas rectilineas reſtringere cenſetur (§. 131.). Magnitudines autem reciproce proportionales in figuris etiam ſolidis commemorantur.

Propoſitiones VI, 14. 15. XI, 34. XII, 9. 15. non dicunt αντιπεπονθοτα parallelogramma, triangula, parallelepipeda, pyramides, cylindros, conos (§. 131.); ſed ων αντιπεπονθασιν αι πλευραι αι περι τας ισας γωνιας, ων αντιπεπονθασιν αι βασεις τοις υψεσι.

Generalis rationis inverſæ ſeu reciprocæ definitio eſt 14ta Lib. V: Αναπαλιν λογος εστι λημψις τε επομενε ως ηγεμενε προς το ηγεμενον ως επομενον.

Præterea in ſingularum propoſitionum VI, 14. 15. XI, 34. XII, 9. 15. expoſitionibus ſenſus formularum: αντιπεπονθασιν αι πλευραι, αι βασεις τοις υψεσι, diſerte indicatur. Prior v. gr. VI, 14tæ pars ſic exponitur: Εχω ισα τα παραλληλογραμμα τα AB, BΓ (*Fig.* 50.), ισας εχοντα τας προς τω B γωνιας, και κειθωσαν επ ευθειας αι ΔB, BE, επ ευθειας αρα εισι και αι ZB BH· λεγω, οτι των AB, BΓ αντιπεπονθασιν αι πλευραι αι περι τας ισας γωνιας, τετ εστιν, ως η ΔB προς την BE ετως η HB προς την BZ; ac poſterior: Αλλα δη αντιπεπονθετωσαν αι πλευραι αι περι τας ισας γωνιας, και εστω ως η ΔB προς την BE ετως η HB προς την BZ· λεγω, οτι ισον εστι το AB παραλληλογραμμον τω BΓ παραλληλογραμμω.

Quæ

---

nem definiendam ſuſcepiſſe. Hinc habetur μιγεθων: pro quo, ſi quidem ratio generaliſſime definienda eſſet, ſubſtitui deberet των ποσων, aut των ορων; ſicut apud Theonem Smyrnæum: Λογος δε εστιν ο κατ ανακλογον δυοιν ορων ομογενων η προς αλληλες ποια σχεσις; & Nicomachum in Arithmeticis: Λογος εστι δυο ορων προς αλληλες σχεσις.

Quæ omnino *Rob. Simſon* de Defin. 2. Lib. VI. judicium (§. 131.) confirmare videntur.

Ejusdem vero ac *Whiſtoni* definitio quatuor magnitudinum reciproce proportionalium (§. 131.), per ſe etiam ad quatuor homogeneas reſtricta, in ſolas Lib. VI. propoſitiones quadrat.

PROPOSITIONES XIV. XV.

§. 133.

Cum parallelogramma unum angulum uni æqualem habentia ſint inter ſe æquiangula (I, 29. 34.), & cujusvis parallelogrammi latera oppoſita ſint æqualia (I, 34.); Propoſitio XIV. ſic etiam poteſt enunciari: Parallelogrammorum æqualium & inter ſe æquiangulorum latera contigua reciproce proportionalia ſunt; & viciſſim æqualia ſunt parallelogramma inter ſe æquiangula, quorum latera contigua ſunt reciproce proportionalia.

§. 134.

Exemplum hujusmodi parallelogrammorum præbent, quæ in I, 43. vocantur parallelogrammorum circa diagonalem complementa.

Nempe (*fig. verſ. Lorenz. vel Hauff. ad* I, 43.) ang. $FKH = EKG$ (I, 15.); &, ob triangula CFK, AEK æquiangula (I, 15. 29.),

$$FK:KE = CF:AE \text{ (§. 52.)}$$
$$= GK:KH \text{ (I, 34. V, 7. 11.).}$$

Unde, uti in demonſtr. VI, 14^tæ, ob parallelogramma $HF:HE = FK:KE$ / $GE:HE = GK:KH$ (VI, 1.),

ſequitur $HF:HE = GE:HE$ (V, 11.); & hinc parallelogr. $HF = GE$ (V, 9.).

§. 135.

In demonſtrationibus Propp. XIV. XV. (*fig. verſ. Lorenz. vel Hauff.*), ſi in directum ponantur hinc DB & BE, inde CA & AD, pariter indirectum fore hinc FB & BG, inde BA & AE, per I, 14^tam, ad quam pleræque Elementor. verſiones hoc remittunt, ſic colligitur:

ob angulum	$FBD = EBG$	$BAC = DAE$	(ſupp.)
ſunt anguli	$FBD+FBE = EBG+FBE$	$BAC+BAD = DAE+BAD$	(Lib. I. Ax. 2.)
Atqui anguli	$FBD+FBE = 2$ Rect.	$BAC+BAD = 2$ Rect.	(constr. & I, 13.)
Igitur & anguli	$EBG+FBE = 2$ Rect.	$DAE+BAD = 2$ Rect.	(Lib. I. Ax. 1.)
hincque ſunt	FB & BG,	BA & AE	in directum (I, 14.)

(COMMANDINUS fol. 77. WHISTON p. 176.)

§. 136.

Hoc modo generatim oſtenditur: Si ad aliquam rectam lineam, ad idem ejus punctum, duæ rectæ, non ad easdem partes ſumtæ, angulos ad verticem æquales fecerint, rectas has in directum ſibi invicem eſſe; quæ eſt altera converſarum propoſitionis I, 15. (PROCLUS p. 79.; CLAVIUS p. 63.; BÆRMANNUS p. 17.), & qua præmiſſa ſupplementum §. 135. expoſitum fit ſuperfluum (CLAVIUS p. 566. ſq.; BÆRMANNUS p. 144.).

Ad eandem etiam, potius quam ad I, 14^tam^, auctor Elementorum reſpexiſſe videtur; cum ad hanc relata illatio in VI, 14.: Κειϑωσαν επ ευϑειας αι ΔΒ, ΒΕ (*Fig.* 50.), επ ευϑειας αρα εισι και αι ΖΒ, ΒΗ (§. 132.), ſimiliterque in demonſtrationibus VI, 15. 23. XI, 39, ob conditionum propoſitarum diverſitatem, præceps præter morem ſit.

Jam PROCLUS quidem (p. 79. ſq.) hanc I, 15^tæ^ converſam in Elementis deſideravit; rationemque omiſſionis, ſed vix probabilem, eſſe conjecit: quod ſimili ad abſurdum deductione ex I, 15ta, qua I, 14. ex I, 13^tia^, elici poſſit; quo etiam modo in *Campani* verſione (p. 148. ſq.) conſecutio, directe §. 135. aſſerta, firmatur.

§. 137.

Utrique Prop. XIV. XV. demonſtrandæ ea etiam adhiberipoteſt conſtructio, ut parallelogramma & triangula propoſita ſibi mutuo ſic adaptentur, ut ipſorum anguli æquales *FBD* & *EBG*, *BAC* & *DAE* congruant (*Fig.* 51. 52.). Tum, pro triangulis ſolum adhuc ducta *BD* recta (*Fig.* 52.), propoſita ope §. 6. eodem modo, quo in *Elementis* ope VI, 1^mæ^, adſtruentur.

§. 138.

Ducta *CE* recta (*Fig.* 52.), Propoſitio XV. ſic etiam aſſeritur:

1°. Aequalibus poſitis *ABC*, *ADE* triangulis, æqualia etiam ſunt triangula *CEB*, *CED* (Lib. I. Ax. 3.): igitur *BD*, *EC* parallelæ (I, 40.); & *CA*: *AD*=*EA*: *AB* (§. 17.).

2°. Viciſſim, ſi *CA*: *AD*=*EA*: *AB*, parallelæ ſunt rectæ *BD*, *EC* (§. 20.); ideoque triangula *CEB*=*CED* (I, 37.), *ABC*=*ADE* (Lib I. Ax. 2.).

Simi-

Similisque demonſtratio, ductis (*Fig.* 51.) parallelogrammorum diagonalibus *FE*, *FD*, *GE*, ac *GD* rectæ, & in ſubſidium ſumta I, 34te parte tertia, Propoſitioni XIV. poteſt applicari.

§. 139.

Eadem I, 34te parte adhibita, Propoſitiones XIV. XV, pariter ac duæ propoſitionis VI, 1. partes, una ex altera poſſunt inferri.

§. 140.

Uno etiam enunciato illas, uti has, comprehendere licet. Conjunctæ autem, quam ſejunctæ, cur facilius intelligerentur Propp. XIV. XV, quod AUSTIN (p. 70.) vult, haud apparet.

Seorſim eas tradendi anſam conſtructionis diverſitas & diſcrepantia §. 133. indicata præbuiſſe videri poſſunt.

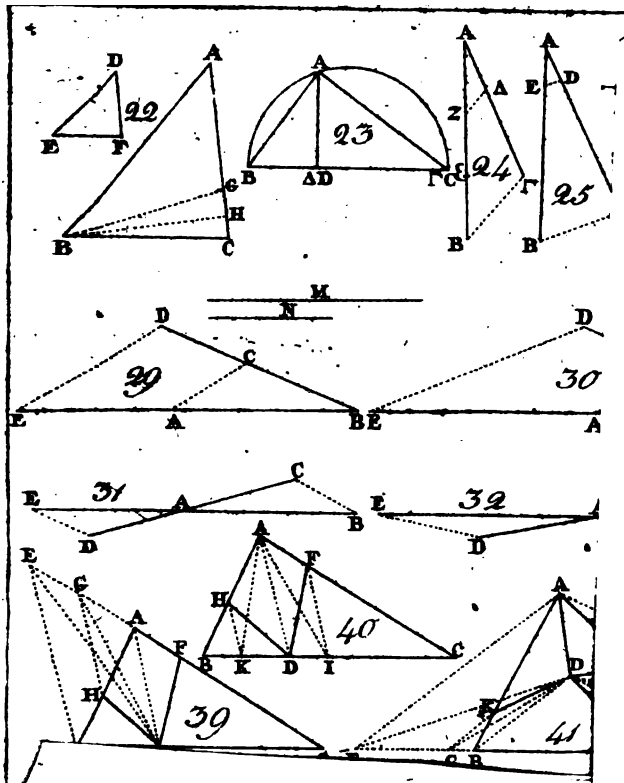
§. 141.

Ope Propoſitionis XIV. in compendium redigitur ſolutio problematis I, 44. Quippe ſub angulo *EBG* = dato *D* (*Fig. verſ. Lorenz vel Hauff.*). facto parallelogrammo *BEFG* = triangulo dato *C* (I, 42.), & data *AB* in directum adjecta ipſi *EB*; rectæ *GA* parallela *EM* ab producta *GB* abſcindet alterum latus parallelogrammi deſiderati *ABML*.

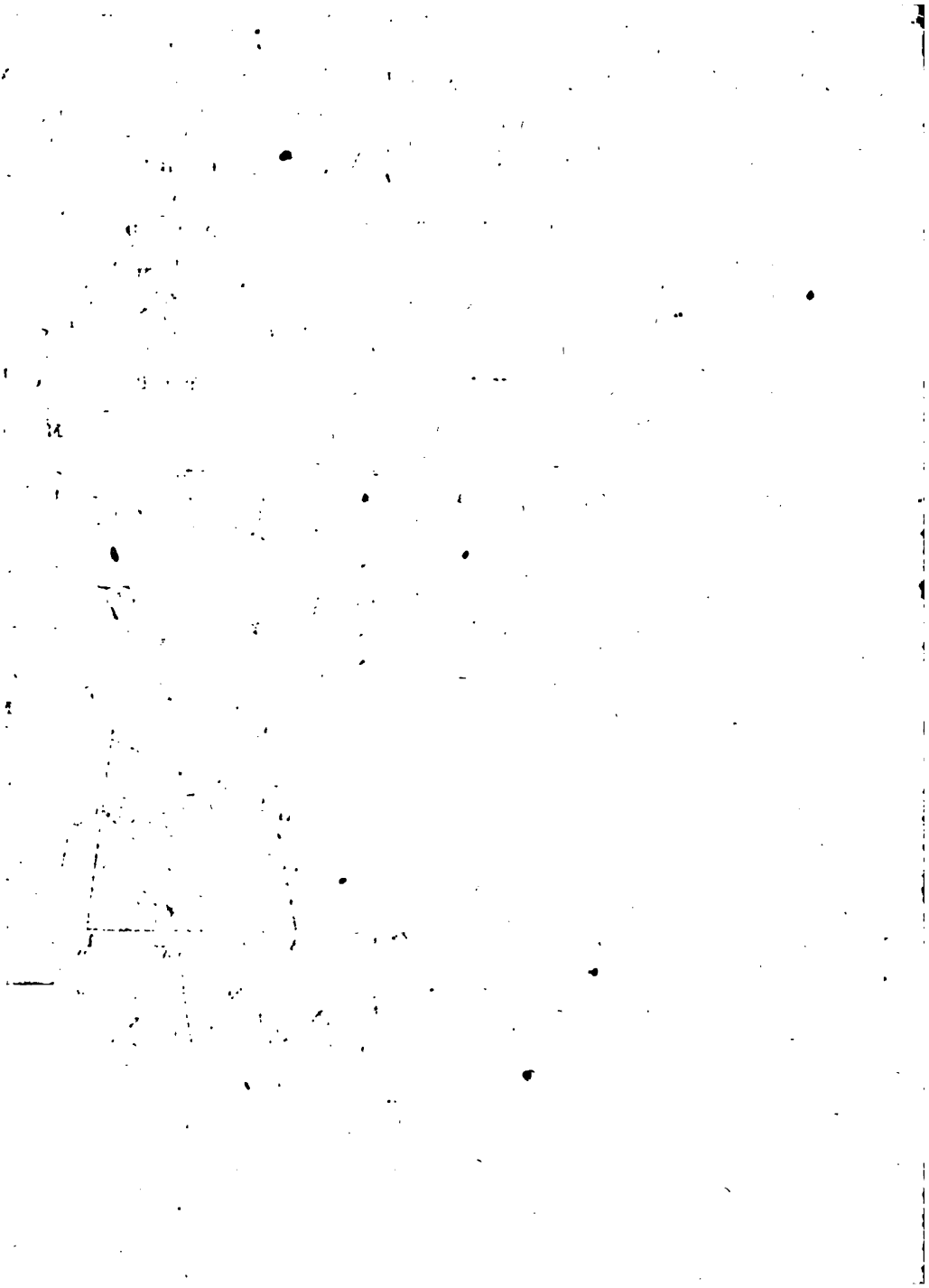
Sic enim *AB*: *BE*=*GB*: *BM* (§. 23.); proinde parallelogrammum *BL*=*BF* (I, 15. VI, 14.) = triangulo *C*.

§. 142.

Generatim Propoſitiones XIV. XV. parallelogrammi vel trianguli dati transformationem in aliud dati lateris, circa eundem vel æqualem angulum, reducunt ad problema VI, 12. Juxta eas ſcilicet quarta proportionalis lateri dato & duobus parallelogrammi triangulive dati circa angulum deſignatum lateribus exhibet alterum circa hunc angulum latus parallelogrammi triangulive conſtruendi.



TUBINGÆ
LITERIS SCHRAMMIANIS.



SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QA
31
L59
1804

QUORUM

PARTEM TERTIAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII.

D. SEPT. MDCCCII.

PUBLICE DEFENDENT

CHRISTIANUS FRIDERICUS KLAIBER, *Wankheimenſis*,
JOSEPHUS FRIDERICUS SEYBOLD, *Brackenheimenſis*,
THEOPHILUS FRIDERICUS JAEGER, *Stuttgardianus*,
AMANDUS FRIDERICUS GÜNZLER, *Degerſchlachtenſis*,
CHRISTIANUS FRIDERICUS FRANCK, *Stuttgardianus*,
CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ
LITERIS SCHRAMMIANIS.

Lib. Com.
Maglione
2-18-28
16615.

PROPOSITIONES XVI. XVII.

§. 143.

Prior ut corollarium ſiſtitur XIV^{tæ}; poſterior ut corollarium prioris. Utraque immediate demonſtrari poteſt iisdem modis, quibus XIV^{ta}; cujus etiam ſic enunciata ad parallelogramma rectangula applicatione ambæ comprehenduntur: Parallelogrammorum rectangulorum æqualium baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales; ac viciſſim æqualia ſunt parallelogramma rectangula, quorum baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales.

§. 144.

Cum quodvis parallelogrammum obliquangulum æquale ſit rectangulo æquealto ſuper eadem baſi (I, 35.): generatim etiam (V, 7. 11.) duo quæcunque parallelogramma æqualia habent baſes altitudinibus reciproce proportionales; ac viciſſim.

§. 145.

Pariter duo quælibet triangula æqualia habere baſes altitudinibus reciproce proportionales; & viciſſim: vel hinc per I, 41. V, 15. infertur; vel ſimiliter de rectangulis primum triangulis, tum de ceteris ope I, 37. ex XV^{ta} deducitur.

§. 146.

Propoſita §. 144. ſq. ex VI, 1. & ejus conſectario §. 12. ſic etiam inferuntur. Denotent $\left.\begin{matrix} B, A, P \\ B', A', P' \end{matrix}\right\}$ baſes, altitudines & areas duorum parallelogrammorum triangulorumve; & Q aream parallelogrammi triangulive, ſub angulo quocunque ſuper baſi B' cum altitudine A facti.

Ita $P : Q = B : B'$ (VI, 1.)

$P' : Q = A' : A$ (§. 12.)

A Quare

N.G.S.

Quare si 1°. $P = P'$, ideoque $P : Q = P' : Q$ (V, 7);
erit (V, 11.) $B : B' = A' : A$.
2°. Vicissim si $B : B' = A' : A$;
fit quoque (V, 11.) $P : Q = P' : Q$
& hinc (V, 9.) $P = P'$.

§. 147.

Quodsi priores XVI^{ta} & XVII^{ma} partes ad Corollaria, VIII^{va} in *Elementis* ac §. 93. seq. subjuncta applicantur; hæ emergunt propositiones.

Perpendiculo ab vertice anguli recti trianguli rectanguli in hypotenusam demisso:

1°. quadratum hujus perpendiculi æquatur rectangulo sub segmentis hypotenusæ ab ipso factis; $AD^q =$ rectg. $BD \times DC$ (*Fig.* 23.).

2°. Cujuslibet catheti quadratum æquale est rectangulo sub hypotenusa & sub ejus segmento, quod catheto huic adjacet; $AB^q =$ rectg. $CB \times BD$, $AC^q =$ rectg. $BC \times CD$.

3°. Rectangulum sub lateribus circa angulum rectum æquale est rectangulo sub hypotenusa et perpendiculo; rectg. $BA \times AC = BC \times AD$.

4°. Rectangulum sub alterutro latere circa angulum rectum et sub perpendiculo æquatur rectangulo sub altero latere circa angulum rectum & sub segmento hypotenusæ, quod priori adjacet cathetо; rectg. $BA \times AD = AC \times BD$, rectg. $CA \times AD = AB \times CD$.

In circulo

5°. quadratum perpendiculi ab quocunque peripheriæ puncto ad aliquam ejus diametrum ducti æquatur rectangulo sub segmentis diametri ab perpendiculo factis.

6°. Cujuslibet chordæ per centrum non transeuntis quadratum æquale est rectangulo sub diametro per unum chordæ extremum ducta, & sub diametri hujus segmento chordæ contiguo, quod ab illa abscindit perpendiculum in eam ex altero chordæ extremo demissum.

Unde porro consequitur: perpendiculo in $\left\{\begin{array}{l}\text{hypotenusam trianguli}\\ \text{diametrum}\end{array}\right.$ rectanguli circuli demisso ex $\left\{\begin{array}{l}\text{vertice anguli recti}\\ \text{puncto quocunque peripheriæ}\end{array}\right\}$, & in circulo ductis ab puncto hoc rectis ad extrema diametri;

7°. hy-

7°. {hypotenuſam / diametrum} eſſe ad alterutrum ipſius ſegmentum, uti quadratum {hypotenuſæ / diametri} ad quadratum {catheti / chordæ} huic ſegmento adjacentis; vel ut hujus {catheti / chordæ} quadratum ad quadratum iſtius ſegmenti; vel ut quadratum {catheti / chordæ} adjacentis alteri ſegmento ad quadratum perpendiculi. Nempe

$BC:CD = BC^q:BC\times CD$ (§. 11.) $= BC^q:CA^q$ } (n°. 2. 6.)
$= BC\times CD:CD^q \quad = AC^q:CD^q$ }
$= CB\times BD:CD\times DB \quad = BA^q:AD^q$ (n°. 1. 2. 5. 6.)

8°. Ipſa autem {hypotenuſæ / diametri} ſegmenta eſſe uti quadrata {cathetorum / chordarum} adjacentium;

$BD:DC = CB\times BD:BC\times CD$ (§. 11.) $= BA^q:AC^q$ (n°. 2. 6.).

9°. Eodemque, quo n°. 8, modo oſtenditur: ex eodem peripheriæ puncto ductis diametro & duabus pluribusve chordis, perpendiculisque ab alteris harum terminis in diametrum demiſſis; quadrata chordarum eſſe ut ſegmenta ipſis adjacentia diametri.

§. 148.

Propoſitionum §. præc. expoſitarum tres primæ, uſus in demonſtrandis X, 34. 35. 36. gratia, traduntur in *Lemmate primo ante* X, 34: & ope VI, 17. 16. ſtabiliuntur mediantibus analogiis, una ab Corollarii VI, 8. parte priori petita, ceteris ex ipſis Propoſitionibus VI, 8. 4. deductis (vid. §. 93.); tertia inſuper demonſtratur, rectangulis ſub *BA* & *AC*, *BC* & *AD* deſcriptis, colligendo ex I, 34. utrumque duplum eſſe trianguli *ABC*.

Primæ & ſecundæ demonſtratio eadem, quæ in *Lemm.* I. *ante* X, 34. repetitur in *Lemmate poſt* XIII, 13. ad efficiendam præcedentis ſeptimæ (§. 147.) partem tertiam.

Ejusdem ſeptimæ pars prima in demonſtrationibus XIII, 14. 15. 16. tanquam nota ſimpliciter ſumitur: pariterque bis in demonſtratione XIII, 18; ſemel autem, bisve, cum adjuncta ratione, *ισογωνιον γαρ*

εςι τω ΒΑΓ τριγωνον τω ΓΑΔ τριγωνω: in demonstratione XIII, 13. autem, pariter ac secunda pars in demonstratione XIII, 18. ex proportione $BC : CA = AC : CD$, vel $DC : CA = AC : CB$, rursus utrobique ab VI, 8. 4. deducta, infertur per VI, 20. Coroll. 2.

Quæ quidem, juncta iis, quæ notata fuere §. 93, nimis, quam ut auctori *Elementorum* tribui possint, ab methodo abludunt ipsi alias solenni, præmissas demonstrationum subsequentium suis locis ad perpetuum deinceps usum stabiliendi; nominatim etiam theorematum generaliorum ad speciales casus applicationes frequenter deinceps adhibendas, quamvis obvias & faciles, seorsim enunciandi, ut immediate essent ad usus occurrentes paratæ (Conf. *Schol. in Lib. II.* §. 12.). Eademque cura Libris X. XIII. prospectum haud fuisse, hunc præsertim oscitantia ipsorum partim anterius, partim vix modo præmissorum immemore, fuisse tractatum, tum reliqua in illis conspicua diligentia & ipsa doctrinarum arduitas existimare prohibent; tum eo minus probabile est, si, quod *Proclus Lib. II.* p. 20. (a) asserit, Euclides της συμπασης ςοιχειωσεως τελος προεςησατο την των καλουμενων Πλατωνικων σχηματων σύςασιν.

Vero potius simile est: ut hodienum, ita & olim communibus, tironum præcipue etiam usibus parata fuisse *Elementorum* exemplaria variis modis respectibusque, compendii ac facilitatis gratia, forsan & arctioris systematis prætextu (b), truncata; sicque plura præsertim, quæ solis X^mo ac XIII^tio in præcedentibus Libris inservirent, his excidisse; ac multifariam, nec apte semper & uniformiter, illorum textui assutis Lemmatibus (conf. §. 13.) insertisque auctariis ansam dedisse.

§. 149.

(a) Conf. Lib. I. p. 7; Lib. II. p. 19. 20. ad titulum in margine: Σκοπος της γεωμετριας; & p. 21: ac Kepleri *Harmonices Mundi Lib. I. Prooemium*, p. 3. sq.; cujus tamen assertum: "Euclidei operis ultimum finem, ad quem referrentur omnes omnino propositiones omnium Librorum, esse quinque corpora regularia;" præter ibi adjectam, quibusdam adhuc exceptionibus obnoxium est.

(b) Cujusmodi de *Elementorum* constitutione præcepta apud *Proclum* leguntur Lib. II. p. 21.

§. 149.

Ob $AB^q = \text{rectg. } CB \times BD$, $AC^q = \text{rectg. } BC \times CD$ (§. 147. n°. 2.) eſt $AB^q + AC^q = \text{rectg. } CB \times BD + BC \times CD =$ conſormiter I, 47^{mæ}. Neque hanc, vel propoſitio pendentem ſupponunt præmiſſæ, quibus demonſtratio aſ nititur.

§. 150.

Propoſitio XVII. explicat identitatem conſtructionis prob atum II, 14. VI, 13. Aequipollere nimirum docet problemata: Invenire latus quadrati rectangulo ſub datis rectis A, B æqualis; & datis rectis A, B mediam proportionalem invenire.

§. 151.

Uti caſus particularis Propoſitionis III, 35. quem ſiſtunt aſſertum §. 147. n°. 5. ac ſolutio problematis II, 14. (vid. *Schol. in Lib. II.* §. 76.) in Libro II. & III. ope II, 5. I, 47. demonſtratus, heic per III, 31. VI, 8. 17. adſtruitur; ita univerſim Propoſitio III, 35. ex III, 21. VI, 4. 16. poteſt inferri.

In circulo enim ductis duabus quibuscunque rectis AC, BD (*Fig.* 53.) intra eum ſe ſecantibus; junctisque earum alterutris extremis AD, BC: præter triangulorum ADE, BCE angulos ad verticem E oppoſitos (I, 15.) æquales ſunt eorum anguli DAE & CBE, D & C (III, 21.); ideoque $AE:ED = BE:EC$ (VI, 4.); et hinc rectg. $AE \times EC = BE \times ED$ (VI, 16.).

Duæ igitur ejusmodi rectæ in circulo ſe mutuo ſecant in partes reciproce proportionales; & rectangulum ſub ſegmentis unius æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius.

§. 152.

Similiter Propoſitionem III, 36. ipſiusque converſam III, 37. ex III, 32. ejusque converſa & VI, 4. 6. 17. nectere licet.

Ab puncto enim D extra circulum (*Fig.* 54.) ductis recta eum in B contingente DB, & quacunque ipſum ſecante DCA; ac junctis AB, BC rectis: præter communem angulum D triangulorum DAB, DBC, æqua-

les

les ſunt eorum anguli A, DBC (III, 32.), ideoque etiam DBA, DCB (I, 32. *Coroll.*); proinde $AD : DB = BD : DC$ (VI, 4.); & hinc rectg. $AD \times DC = DB^q$ (VI, 17.).

Ab puncto igitur extra circulum ductis recta eum tangente, & altera ipſum ſecante: tangens media proportionalis eſt inter ſecantem rectam ejusque partem exteriorem; & tangentis quadratum æquatur rectangulo ſub tota ſecante ipſiusque parte exteriori.

Viciſſim ſi rectg. $AD \times DC = DB^q$, ideoque $AD : DB = BD : DC$ (VI, 17.): triangulorum DAB, DBC, latera circa angulum communem D proportionalia habentium, anguli A, DBC, quibus homologa latera DB, DC ſubtenduntur, æquales ſunt (VI, 6.): quare DB recta circulum in B contingit (III, 32. *Conv.*).

§. 153.

Priore caſu §. 152. in triangulis æquiangulis DAB, DBC etiam ſunt

$$\left.\begin{array}{l} AD : DB = AB : BC = AB^q : AB \times BC \\ BD : DC = AB : BC = AB \times BC : BC^q \end{array}\right\} \text{(§. 52. 11.)}$$

Itaque $AD : DC = AB^q : BC^q$ (V, 22.):

h. e. ab puncto extra circulum ductis recta eum tangente, & altera ipſum ſecante, ductisque in circulo rectis jungentibus punctum contactus prioris & puncta ſectionum alterius; tota ſecans recta eſt ad partem ipſius exteriorem, uti quadratum rectæ ab puncto contactus ad extremum ſecantis totius ductæ, ad quadratum rectæ jungentis punctum contactus atque alterum ſectionis punctum.

Viciſſim ſi $AD : DC = AB^q : BC^q$:

cum, ducta rectæ AB parallela CG, etiam ſit

$$AD : DC = AB : CG = AB^q : AB \times CG \text{ (§. 61. 11.)}$$

ideoque (V, 11.) $AB^q : BC^q = AB^q : AB \times CG$

(V, 9.) $BC^q = AB \times CG$

(VI, 17.) $AB : BC = BC : CG$

ac ſit angulus $ABC = BCG$ (I, 29.);

eſt angulus $A = DBC$ (VI, 6.), & hinc DB circulum in B contingit (III, 32. *Conv.*)

§. 154.

Propoſita §. 152. ſq. ſic etiam enunciantur. Circa triangulum non-æquicrurum deſcripto circulo, & per verticem trianguli ducta recta circulum tangente; hæc baſi productæ ſic occurrit: ut rectangulum ſub rectis puncto huic occurſus extremisque baſis interjacentibus æquale ſit quadrato rectæ ab eodem occurſus puncto ad verticem trianguli ductæ; rectæ vero inter punctum illud occurſus ac terminos baſis in ipſa abſciſſæ eandem habeant rationem, quam crurum trianguli, quibus adjacent, quadrata.

Nempe ſi triangulo ACB, cujus crus $AB \trianglerighteq BC$, circulus circumſcribitur; & hunc in B contingens agitur recta BD: ob angulum $DBC = A$ (III, 32.) $\trianglelefteq ACB$ (I, 18.), ideoque angulos $DBC + DCB \trianglelefteq ACB + DCB$ h. e. (I, 13.) $\trianglelefteq$ 2 rectis: ad partes angulorum DBC, DCB concurrunt rectæ AC, BD (*Lib.* I. *Ax.* 11.). Actum

rectg. $AD \times DC = DB^q$ (§. 152. n°. 1.)

$AD : DC = AB^q : BC^q$ (§. 153. n°. 1.)

Viciſſim 1°. ſi trianguli non-æquicruri ACB baſis AC ad partes cruris minoris BC ſic producitur, ut rectangulum ſub adjecta CD & ſub compoſita DA ex baſi AC & adjecta CD æquale ſit quadrato rectæ DB ab termino D continuationis baſis ad trianguli verticem B ductæ: recta hæc circulum triangulo circumſcriptum in B contingit (§. 152. n°. 2.); & ſegmenta baſis AD, DC, terminis ipſius A, C, ac puncto D intercepta, ſunt uti quadrata crurum trianguli AB, BC, ipſis adjacentium (§. 153. n°. 1.).

Atque 2°. ſi trianguli non-æquicruri ACB baſis AC ad partes cruris minoris ſic in D usque producitur, ut ſegmenta ejus AD, DC, puncto hoc D terminisque A, C baſis intercepta, ſint ut crurum trianguli AB, BC ipſis adjacentium quadrata: recta ab puncto D ad verticem B trianguli ducta circulum triangulo circumſcriptum in B contingit (§. 153. n°. 2.); & rectæ DB quadratum æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis AD, DC baſis, puncto D ac terminis ejus A, C interceptis (§. 152. n°. 1.).

Poſterior converſa eſt *Lemma* 2. *Libri* II. *Locorum planorum Apollonii.* (*Apollonius Ebene Oertex.* S. 211.)

§. 155.

§. 155.

Pariter immediate per III, 21. vel 22. & VI, 4. 16. demonſtratur, quod a CLAVIO (p. 310.), BAERMANNO (p. 86.), Propoſitioni III, 36. ſubjungitur Corollarium: Si a puncto D extra circulum ducantur duæ quæcunque rectæ DA, DF, eum ſecantes (*Fig.* 55.); rectangula $AD \times DC$, $FD \times DE$ ſub totis & partibus earum exterioribus æqualia eſſe.

Junctis enim AE, FC rectis: ob angulos FAD, CFD æquales (III, 21.), ac D communem in triangulis DAE, DFC, ſunt $AD : DE = FD : DC$ (VI, 4.); proinde rectg. $AD \times DC = FD \times DE$ (VI, 16.).

Vel junctis AF, CE rectis: ob angulos $\left\{\begin{matrix} FAC \\ FAD \end{matrix}\right\} + FEC = 2$ rectis (III, 22.) $= DEC + FEC$ (I, 13.), atque $\left\{\begin{matrix} AFE \\ AFD \end{matrix}\right\} + ACE = 2$ rectis (III, 22.) $= DCE + ACE$ (I, 13.), ſunt anguli $FAD = DEC$, $AFD = DCE$, & angulus D communis in triangulis DAF, DEC; quare $AD : DF = ED : DC$ (VI, 4.), & rectg. $AD \times DC = FD \times DE$ (VI, 16.).

Ab puncto igitur extra circulum ductis duabus rectis cum ſecantibus; totæ ſecantes ſunt partibus ſuis exterioribus reciproce proportionales; & rectangula ſub totis ac partibus ipſarum exterioribus æqualia ſunt.

§. 156.

Porro analyſis ac demonſtratio Problematis IV, 10. propoſitionibus III, 36. ſq. ibi nixæ, adhibitis VI, 3. 6. 17, ſubſidio circuli triangulo ADC circumſcribendi haud indigent.

Poſito enim, ADB (*Fig.* 56.) eſſe triangulum æquicrurum, cujus ſinguli ad baſin BD anguli ſint dupli ejus, qui ad verticem A; & bifariam diviſo alterutro ad baſin angulo ADB per rectam DC, unde (I, 6.) $AC = CD$ ob angulum $A = ADC$, & $CD = DB$ ob angulum $BCD = A + ADC$ (I, 32.) $= 2A = B$, itaque $AC = BD$: oportet, ſit

$$BC : CA = BD : DA \text{ (VI, 3.)} = CA : AB \text{ (V, 7. 11.)}$$

& hinc $CA^q =$ rectg. $AB \times BC$ (VI, 17.).

Tum recta AB ita in C ſecta, ut ſit $CA^q =$ rectg. $AB \times BC$ (II, 11.); & conſtructo triangulo ABD, cujus crus $AD = AB$, & baſis $BD = AC$ (I, 22.): eſt BC:

$BC : CA = CA : AB$ (VI, 17.) $= BD : DA$ (V, 7. 11.);
angulum igitur ADB bifariam ſecat recta DC (VI, 3.);
pariterque ob $BD^q = CA^q =$ rectg. $AB \times BC$ eſt $CB : BD = DB : BA$ (VI, 17.);
unde, ob angulum B communem, eſt angulus $BDC = A$ (VI, 6.):
proinde angulus $ADB = 2A$.

§. 157.

Eodem in triangulo æquicruro ADB eſt
rectg. $AD \times DB = BA \times AC$ (*conſtr.*) $= AC \times CB + AC^q$ (II, 3.) $= AC \times CB + DC^q$ (*demonſtr.*):
quod univerſim verum eſſe, quodcunque ſit triangulum ABD (*Fig.* 57.), & quicunque ejus angulus D ſecetur bifariam, ſic oſtenditur.

Recta DC, bifariam angulum ADB ſecans, continuetur, donec circulo, qui triangulo ABD circumſcribitur, rurſus in E occurrat; & jungatur alterutra recta AE, BE.

Poſteriore ducta, eſt angulus $A = E$ (III, 21.). Quare, cum etiam ſit angulus $ADC = BDE$ (*hyp.*), eſt $AD : DC = ED : DB$ (VI, 4.);
& hinc
rectg. $AD \times DB = ED \times DC$ (VI, 16.) $= DC \times CE + DC^q$ (II, 3.) $= AC \times CB + DC^q$ (III, 35. vel §. 151.).

Cujuslibet igitur trianguli ABD angulo quocúnque D bifariam ſecto per rectam DC; rectangulum ſub ejus lateribus AD, DB, angulum D comprehendentibus, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis AC, CB tertii lateris, ab recta DC factis, una cum hujus rectæ DC quadrato. Rob. Simson Lib. VI. Prop. B. (p. 219. *Matthias* p. 101.).

§. 158.

Univerſim pariter (quod de trianguli rectanguli lateribus circá angulum rectum §. 147. n°. 3. tradi per III, 31. *Convers.* vel III, 33. n°. 2. conſequitur) rectangulum ſub duobus quibuscunque lateribus cujuslibet trianguli æquale eſt rectangulo ſub diametro circuli triangulo circumſcripti & ſub perpendiculo ex vertice anguli, quem latera iſta comprehendunt, in latus tertium demiſſo.

1°. Si ipſum alterutrum latus AB tertio BC eſt perpendiculare (*Fig.* 58.): alterum AC diameter eſt circuli triangulo circumſcripti (III, 31. *Conv.* vel III, 33. n°. 2.); & propoſitio ad hanc identicam redit: rectg. $BA \times AC = CA \times AB$.

2°. Si uterque ad basin seu tertium latus BC angulus est acutus, quicunque sit angulus BAC duobus lateribus BA, AC comprehensus (*Fig.* 59.); vel si alteruter ad basin angulus ABC est obtusus (*Fig.* 60.): per verticem A ducta diametro AGE, & juncta BE recta, perpendiculoque AD in basin BC demisso; ob angulos ABE, ADC rectos (III, 31. & *constr.*), atque $E = C$ (III, 21.), in triangulis ABE, ADC est

$$BA : AE = DA : AC \text{ (VI, 4.)},$$

proinde rectg. $BA \times AC = EA \times AD$ (VI, 16.)

Rob. Simson Lib. VI. Prop. C. (p. 120. *Matthias* p. 101. sq.).

§. 159.

Hinc rectg. $BC \times AD : BA \times AC = BC \times AD : EA \times AD$ (§. 158. & V, 7.)
$= BC : AE$ (§. 11.)

ubi rectg. $BC \times AD$ duplum est areæ trianguli (I, 41.).

Quare duplum areæ cujusvis trianguli est ad rectangulum sub duobus ipsius lateribus, uti tertium latus ad diametrum circuli triangulo circumscripti.

§. 160.

Conversas præcedentium, præter jam (§. 152. sqq.) expositas, notemus adhuc sequentes.

Si quadratum perpendiculi AD (*Fig.* 23.), quod in trianguli ABC latus BC angulis ipsius acutis interjacens ex vertice opposito A demittitur, æquale est rectangulo sub segmentis BD, DC lateris BC, ab perpendiculo AD factis; seu (VI, 17.) si perpendiculum AD medium proportionale est inter segmenta BD, DC lateris BC: trianguli ad verticem A angulus est rectus.

Quippe ob $BD : DA = AD : DC$, & angulos ad D rectos, est angulus $BAD = C$ (VI, 6.); angulus igitur $BAC = C + CAD =$ recto (I, 32. *Coroll.*)

§. 161.

Pappus (*Collect. Math.* Lib. VII. Prop. 203. fol. 277.) propositioni huic adjungit: Si quadratum perpendiculi AD minus fuerit rectangulo sub segmentis BD, DC lateris BC, angulus BAC erit obtusus (*Fig.* 61.); si majus, acutus (*Fig.* 62.)

Semicirculo enim super diametro BC descripto, qui perpendiculum

DA

DA in puncto E ſecet; ac rectis BE, CE junctis: ob $ED^q \doteq$ rectg. $BD \times DC$ (§. 147. n°. 5.), priori caſu erit $AD \lessdot ED$, & hinc angulus $BAC \gtrdot BEC$ (I, 21.); poſteriori $AD \gtrdot ED$, atque angulus $BAC \lessdot BEC$ (I, 21.). Rectus autem eſt angulus BAC (III, 31.).

§. 162.

Propoſitorum §. 160. ſq. caſus ſpecialis, quo ſegmenta BD, DC æqualia ſunt, comprehenditur etiam iis, quæ in *Schol. in Lib. II.* §. 220. traduntur.

§. 163.

Cum §. 160. oſtenſum ſit: rectum eſſe angulum BAC (*Fig.* 23.), quem ab extremis B, C rectæ BC ad extremum $\perp$ perpendiculi AD ductæ BA, CA comprehendunt, ſi rectg. $BD \times DC = AD^q$, ſeu ſi $BD : DA = AD : DC$; per converſam III, $31^{mæ}$ conſequitur: circuli ſuper diametro BC deſcripti peripheriam tranſire per verticem A rectæ DA diametro BC inter extrema ipſius normalis, quæ media proportionalis eſt inter ſegmenta diametri BC puncto D facta, ſeu cujus quadratum rectangulo ſub ſegmentis illis eſt æquale.

§. 164.

Clavius (p. 308. ſq. 312.) per impoſſibilitatem contrarii has demonſtrat propoſitorum §. 151. 155. converſas:

1°. "Si duæ rectæ ita ſe ſecent, ut rectangulum ſub unius ſegmentis comprehenſum æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo: deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus; h. e. circulus, per quælibet tria puncta earum extrema deſcriptus (IV, 5.), per quartum quoque punctum tranſibit."

2°. "Si a puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita ſecentur in binas partes, ut rectangula ſub totis & ſegmentis prope punctum comprehenſa ſint æqualia: deſcribi poterit per extrema puncta aliorum ſegmentorum circulus; h. e. circulus, per tria puncta extrema aliorum ſegmentorum deſcriptus, per quartum etiam punctum extremum tranſibit."

Eædem vero directe per converſas propoſitionum III, 21. 22. (quas & Clavius p. 278. 279. ſq. his ſubjunxit) ſic adſtruuntur:

1°. Sit (*Fig.* 53.) rectg. $AE \times EC = BE \times ED$, ſeu (VI, 16.) $AE : ED = BE : EC$; cum & æquales ſint anguli ad verticem E triangulorum ADE, BCE (I, 15.); eſt angulus $D = C$ (VI, 6.); itaque punctum D ad peripheriam circuli triangulo ABC circumſcripti (III, 21. *Conv.*).

2°. Sit (*Fig.* 55.) rectg. $AD \times DC = FD \times DE$, ſeu (VI, 16.) $\left\{\begin{matrix} AD : DE = FD : DC \\ AD : DF = ED : DC \end{matrix}\right\}$: cum hæc latera proportionalia communem comprehendant angulum D triangulorum $\left\{\begin{matrix} DEA, & DCF \\ DAF, & DEC \end{matrix}\right\}$; eſt angulus $DAE = DFC$ (VI, 6.), itaque punctum A ad peripheriam circuli triangulo CEF circumſcripti (III, 21. *Convers.*); vel ſunt anguli $DFA = DCE$, $DAF = DEC$ (VI, 6.); proinde anguli $\left\{\begin{matrix} DFA + ACE = DCE + ACE \\ DAF + FEC = DEC + FEC \end{matrix}\right\} = 2$ Rect. (I, 13.); circulus igitur poteſt quadrilatero $CAFE$ circumſcribi (III, 22. *Conv.*).

§. 165.

Univerſe autem vera non eſt hæc Propoſitionis III, 35, ſeu §. 151. converſa: Si (*Fig.* 53.) ad idem punctum E rectæ AC in circulo ductæ, ad oppoſitas ejus partes, duæ rectæ EB, ED ad peripheriam ſic aguntur, ut rectangulum ſub ipſis æquale ſit rectangulo ſub ſegmentis AE, EC rectæ AC; poſteriores duæ rectæ BE, ED jacent in directum.

Sint enim (*Fig.* 63. 64.) AC, BH duæ rectæ in circulo, ſe intra eum ſecantes in E puncto, quarum neutra per centrum G circuli transeat; & recta GE producta arcum CH, in quem incidit, ſic in puncto F ſecet, ut arcus FH minor ſit reliquo arcu FC. Tum, ſi ab hoc reliquo arcu abſcinditur $FD = FH$, & recta ED ducitur: fit $ED = EH$ (III, 27. 7.); itaque rectg. $BE \times ED = BE \times EH = AE \times EC$ (§. 151.); nec in directum jacent BE, ED.

§. 166.

Subjungamus Problemata nonnulla, uſum præcedentium declarantia.

Problema I. Quadratum deſcribere, quod ſit quadrati dati multiplum aſſignatum; vel pars aſſignata; vel quod ad quadratum datum habeat rationem inæqualitatis eo, qui §. 108. explicatur, modo datam.

Lateris AB quadrati dati $ABCD$ ſumatur multiplum aſſignatum AE (*Fig.* 65.); vel (VI, 9.) pars aſſignata AE (*Fig.* 66.): vel latus AB in ratione

ratione data $M : N$ quadrati propoſiti $ABCD$ ad quadratum deſcribendum continuetur (§. 101.) ad punctum E usque (*Fig.* 67.); aut ſecetur (§. 99.) in puncto E (*Fig.* 68.); ſic ut ſit $M : N = BA : AE$: ac finiatur parallelogrammum rectangulum $AEFD$ ſub EA & AD.

Erit hoc rectangulum $AEFD$ in *Fig.* 65. multiplum aſſignatum, in *Fig.* 66. pars aſſignata quadrati $ABCD$ (*Schol. in Lib.* II. §. 3.); in *Fig.* 67. 68. autem rectangulum $AEFD$ ad quadratum $ABCD$ habebit rationem $EA : AB$ (VI, 1.) datæ $N : M$ eandem (*conſtr.*).

Quadratum igitur deſcribendum rectangulo $AEFD$ æquari; proinde (VI, 17.) latus ipſius medium proportionale eſſe debet inter EA & AD ſeu AB.

Semicirculo itaque ſuper diametro AE deſcripto in *Fig.* 65. 67. cui producta BC in G occurrit; in *Fig.* 66. 68. autem ſuper diametro AB deſcripto ſemicirculo, qui rectam EF in G ſecat; tum juncta AG recta: hæc erit latus quadrati, quod fieri jubetur (§. 126.).

§. 167.

Problema II. Datam rectam in inæqualia ſic dividere, ut rectangulum ſub ſegmentis æquale ſit quadrato differentiæ ſegmentorum.

Sit AE recta data (*Fig.* 65.); factaque ſit diviſio imperata in puncto L; h. e. ſic, ut ſit rectg. $AL \times LE = (AL - LE)^q$.

Erit
$$\left.\begin{array}{l} 3\,AL \times LE \\ 5\,AL \times LE \\ 5(AL-LE)^q \end{array}\right\} = AL^q + LE^q \text{ (II, 7. \& } \textit{Schol. in Lib.} \text{ II. §. 88.)} = (AL+LE)^q \text{ (II, 4.)} = AE^q$$
$$(AL-LE)^q = \tfrac{1}{5} AE^q.$$

Datur itaque (§. 166.) differentia ſegmentorum AL, LE. Quare, cum & ſumma ipſorum AE detur, dantur ipſa ſegmenta (*Schol. in Lib.* II. §. 30. 51.).

Nempe $AB = \frac{1}{5} AE$ abſciſſa ab data AE, & ſemicirculo ſuper hac deſcripto, eidemque ducta in B normali BG ad occurſum usque ſemicirculi in G (§. 166.); tum ab AE abſciſſa $AK = AG$; & reſidua KE bifariam in L ſecta (*Schol in Lib.* II. §. 51.): factum erit, quod jubetur.

Sic enim $4 \text{Rectg.} AL \times LE + AK^q = AE^q$ (II, 8. vel *Schol. in Lib.* II. §. 99.)
$= 5\,AG^q$ (*conſtr.* & §. 166.)
$= 5\,AK^q$ (*conſtr.*)

Unde

Unde $4\text{Rectg.}AL\times LE = 4AK^q$
$\text{Rectg.}AL\times LE = AK^q$
$= (AL-LE)^q$, ob $LK=LE$ (*conſtr.*)

§. 168.

Problema III. Datis ſumma AB laterum duorum inæqualium quadratorum (*Fig.* 69. 70.), & latere HI quadrati æqualis differentiæ ipſorum quadratorum; invenire eorum latera: ſeu propoſitam rectam AB in inæqualia ſic ſecare, ut quadratorum ab ſegmentis ejus factorum differentia ſit quadrato rectæ datæ HI æqualis: ſeu conſtruere triangulum rectangulum, cujus unus cathetus ſit datæ rectæ HI; ſumma autem hypotenuſæ alteriusque catheti, datæ AB æqualis: ſeu deſcribere parallelogrammum rectangulum, cujus unum latus datæ HI, ſumma autem diagonalis alteriusque lateris priori contigui datæ AB æquetur. (*)

Facta ſit rectæ AB diviſio imperata in puncto D, ita ut $AD > DB$.

Cum ſit AD^q, ac tanto majus $AD^q - DB^q < AB^q$; ut poſſit eſſe $AD^q - DB^q = HI^q$, oportet, ſit $HI^q < AB^q$, $HI < AB$.

Cum (*Fig.* 69.) bifariam in C ſecta AB, ſit $AD^q - DB^q = 4AC\times CD$ (*Schol. in Lib II.* §. 101.);
fieri debet $4AC\times CD = HI^q = 4KI^q$, bifariam in K ſecta HI
proinde $\text{rectg.}AC\times CD = KI^q$
$AC : KI = KI : CD$ (VI, 17.)

Quod

(*) In *Scholiis in Lib. II. Element.* §. 136. ſqq. 179. ſq. ſoluta fuerunt Problemata: Datis {ſumma / differentia} AB laterum duorum quadratorum, & latere HI quadrati æqualis ſummæ ipſorum quadratorum; invenire eorum latera: ſeu propoſitam rectam AB ita {ſecare / continuare}, ut {quadratorum ab ſegmentis ejus factorum ſumma / quadratum adjectæ} & {quadratum compoſitæ / quadratorum ex data & adjecta ſimul} æqualia ſint} quadrato rectæ datæ HI: ſeu conſtruere triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa ſit datæ rectæ HI, {ſumma / differentia} autem cathetorum datæ AB æqualis: ſeu deſcribere parallelogrammum rectangulum, cujus diagonalis datæ HI, ac {ſumma / differentia} laterum contiguorum datæ AB æquentur. Quæ problemata algebraice ſoluta exſtant in *Lhuiliers Anleitung zur Elementar-Algebra.* I Th. §. 80. 81. 86. 88.

Quod juxta §. 125. fit: rectæ AB in C conſtituendo perpendicularem $CE = KI$; & AE rectæ in E ducendo normalem ED: quæ, ob $HI < AB$ (*determ.*), proinde $KI < AC$, $KI^q < AC^q$ ſeu rectg. $AC \times CB$, ideoque (§. 161. ſq.) angulum AEB obtuſum, AEC vero acutum (I, 17.), intra angulum CEB cadet; rectam igitur CB in puncto D inter ejus extrema C, B ſito ſecabit.

§. 169.

Vel cum duorum inæqualium quadratorum differentia ſit rectangulo ſub ſumma & differentia laterum ipſorum æqualis (*Schol. in Lib. II.* §. 21. 26. 45.); h. e. (*Fig.* 70.) $AD^q - DB^q =$ rectg. $BA \times AG$, $DG = DB$ abſciſſa ab AD: rectangulum hoc $BA \times AG$ datæ HI quadrato æquari; differentia igitur AG laterum quadratorum tertia proportionalis eſſe debet datæ laterum ſummæ AB et rectæ HI (VI, 17.). Quæ differentia proinde, ob $HI < AB$ (*determ.*), juxta §. 124. n°. 1. invenitur: in ſemicirculo ſuper data AB deſcripto aptando rectam $AF = HI$, & ex F demittendo perpendiculum FG in diametrum AB. Ab ſumma autem AB ſic abſciſſa differentia AG, habentur latera ipſa AD, DB, bifariam in D ſecando reſiduam GB (*Schol. in Lib.* II. §. 51.).

Conſtructionem hanc tradunt MARINUS GHETALDUS (*De reſolutione et compoſitione mathematica Libri quinque.* Romæ 1630. Lib. I. Probl. IV. p. 22. ſeq.); JACOBUS DE BILLY (*Diophantus geometra.* Paris. 1660. Lib. I. Prop. XXVIII. p. 55. ſq.).

§. 170.

PROBLEMA IV. Datis differentia AB laterum duorum inæqualium quadratorum (*Fig.* 71. 72.), & latere HI quadrati æqualis differentiæ ipſorum quadratorum; invenire eorum latera: ſeu propoſitæ rectæ AB aliam in directum ſic adjicere, ut quadratum compoſitæ ex data & adjecta excedat quadratum adjectæ ſpatio æquali quadrato rectæ datæ HI: ſeu triangulum rectangulum conſtruere, cujus unus cathetus ſit datæ rectæ HI; exceſſus autem hypotenuſæ ſuper alterum cathetum, datæ AB æqualis: &c.

Facta ſit continuatio imperata rectæ datæ AB ad D usque.

Cum ſit $AD^q - DB^q = AB^q + 2AB \times BD$ (II, 4.) $> AB^q$: ut poſſit eſſe

esse $AD^q - DB^q = HI^q$; oportet, sit $HI^q \rhd AB^q$, $HI \rhd AB$. Idem inde etiam consequitur; quod in omni triangulo non-æquicruro differentia crurum minor est basi seu tertio latere (I, 20. *Coroll.*).

Cum (*Fig.* 71.) bifariam in C secta AB, sit $AD^q - DB^q = 4AC \times CD$ (*Schol. in Lib.* II. §. 100.);
fieri debet $4AC \times CD = HI^q = 4KI^q$, bifariam in K secta KI
itaque rectg. $AC \times CD = KI^q$
$AC : KI = KI : CD$ (VI, 35.).

Quod juxta §. 125. fit: rectæ AB in C erigendo perpendicularem $CE = KI$; & AE rectæ in E ducendo normalem ED: quæ, ob $HI \rhd AB$ (*determ.*), ideoque $KI \rhd AC$, $KI^q \rhd AC^q$ seu rectg. $AC \times CB$, proinde angulum AEB acutum (§. 161. sq.), extra angulum AEB cadet; ob angulum vero A trianguli ACE ad C rectanguli acutum (I, 17.), ideoque angulos $A + AED \lhd$ 2Rect., productæ ad has partes AB in D occurret (*Lib.* I. *Ax.* 11.).

§. 171.

Vel cum duorum inæqualium quadratorum differentia sit rectangulo sub summa & differentia laterum ipsorum æqualis (*Schol. in Lib.* II. §. 21. 26. 45.): rectangulum hoc datæ HI æquari; proinde summa laterum quadratorum tertia proportionalis esse debet datæ laterum differentiæ AB & rectæ HI (VI, 17.). Quæ summa proinde, ob $HI \rhd AB$ (*determ.*), juxta §. 124. n°. 2. invenitur: super AB (*Fig.* 72.), tanquam cathetо, triangulum constituendo rectangulum ABF, cujus hypotenusa AF sit datæ HI æqualis; & huic AF in F ducendo perpendicularem FG, quæ desideratam AG ab producta AB abscindit (VI, 8. *Coroll.*). Quo facto, cum BG sit excessus summæ laterum inventæ AG super datam ipsorum differentiam AB, bifariam in D secando BG obtinentur ipsa latera AD & DG seu DB (*Schol. in Lib.* II. §. 51.).

Solutionem hanc indicat Billy Lib. I. Prop. XXXI. p. 59. sq.

§. 172.

Problema V. Datis (*Fig.* 73.) latere AB quadrati æqualis summæ duorum inaequalium quadratorum, & latere l quadrati æqualis differentiæ eorum; invenire ipsorum latera: seu construere triangulum rectangulum, cujus hypotenusa datæ rectæ AB; & differentia quadratorum cathetorum quadrato rectæ datæ l sit æqualis: &c.

Cum

Cum differentia duarum magnitudinum inæqualium aggregato earum ſit minor; liquet, eſſe debere $I^q < AB^q$, $I < AB$.

Poſitis P, Q lateribus duorum quadratorum; $P > Q$:

ut ſint $P^q + Q^q = AB^q$

$P^q - Q^q = I^q$;

eſſe debent $2P^q = AB^q + I^q$; $P^q = \frac{AB^q + I^q}{2}$ (*)

$2Q^q = AB^q - I^q$; $Q^q = \frac{AB^q - I^q}{2}$

Itaque rectarum P, Q conſtructio ad invenienda ope I, 47. (conf. *Schol. in Lib. II.* §. 66. 70.) quadratorum, quæ ſummæ ac differentiæ datorum AB^q, I^q æquentur, latera; tum vero ad exhibenda juxta §. 166. quæ horum dimidia ſint, quadratorum latera reducitur.

§. 173.

Concinnior deſcriptio ex altero Problematis enunciato conſequitur.

Vertex nimirum C trianguli rectanguli ABC ſuper hypotenuſa data AB conſtruendi debet eſſe ad peripheriam ſemicirculi ſuper diametro AB deſcripti (III, 31. *Conv.* vel III, 33. n°. 2.).

Perpendiculo CD ex vertice C in hypotenuſam AB demiſſo, eſt $AC^q - CB^q = AD^q - DB^q$ (I, 47. *Coroll.* vel *Schol. in Lib. II.* §. 226.) Fieri igitur debet $AD^q - DB^q = I^q$; ideoque inventio puncti D, & perpendiculi

(*) Operoſiore analyſi Pappus in Prop. 228. *Lib. VII. Collect. math.* (fol. 297.), ſeu in *Lemm. VIII. ad Lib. VII. & VIII. Conic. Apollonii* (*Apollonii Conicorum Libri tres poſteriores — Opera Edm. Halleji* — Oxon. 1710. p. 95.) hoc ſic deducit; & data ſumma quadratorum ex AB & BC, (*Fig.* 74.) una cum differentia eorundem, utramque ex ipſis AB & BC datam eſſe infert: Poſita BD ipſi BC æquali, datum erit rectangulum CAD, quod nempe per II, 6. differentia eſt quadratorum ex AB, BC. Dato autem rectangulo CAD, ejus duplum quoque datur. Pariterque datur ſumma quadratorum ex CA & AD, quippe dupla ſummæ quadratorum ex AB & BC (II, 10.). Proinde per II, 4. datum eſt quadratum ex CA & AD ſimul ſumtis; adeoque & ſumma ipſarum CA, AD data eſt. Hujus vero dimidia eſt BA: quare BA data eſt; ac proinde BC quoque datur.

culi DC quod alter eſt locus verticis C, reducitur ad *Probl.* III. (§. 168. ſq.): datam rectam AB in inæqualia in puncto D ita ſecare, ut ſit $AD^q - DB^q =$ quadrato rectæ datæ I. Quod juxta §. 169. efficitur: in ſemicirculo ſuper AB deſcripto rectam $AF = I$ aptando; & perpendiculo FG ex F in AB demiſſo, rectam BG bifariam in D ſecando. Tum perpendiculum DC, hypotenuſæ AB in puncto D conſtitutum, verticem C trianguli conſtruendi deſignat in peripheria ſemicirculi ſuper AB deſcripti.

§. 174.

Bifariam in E ſecta AB, quoque eſt $AC^q - CB^q = 2AB \times ED$ (*Schol. in Lib. II.* §. 224. ſqq.). Quare etiam, ſi in ſemicirculo ſuper EB deſcripto recta $EL = \frac{1}{2}I$ aptatur, ac per L diametro EB normalis ducitur DLC, hujus cum peripheria ſemicirculi ſuper AB deſcripti interſectio verticem C trianguli conſtruendi determinat. Sic quippe fit $AC^q - CB^q = 4BE \times LD = 4EL^q$ (§. 147. n°. 6.) $= I^q$. Conf. Apollonii *Loca plana. Lib. II. Prop. I.*

§. 175.

Problema VI. Datis (*Fig. 75.*) latere AB quadrati æqualis ſummæ duorum quadratorum, & latere I quadrati æqualis rectangulo ſub ipſorum lateribus; invenire hæc latera: ſeu conſtruere triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa datæ rectæ AB; & rectangulum ſub cathetis, ſeu (1, 41) dupla area trianguli, quadrato datæ rectæ I æquentur: ſeu deſcribere parallelogrammum rectangulum, cujus diagonalis datæ AB, & area quadrato rectæ datæ I ſint æquales. (*)

Cum

(*) Probl. mata: conſtruere parallelogrammum rectangulum, cujus {differentia / ſumma} laterum contiguorum ſit datæ rectæ AB, area autem quadrato rectæ datæ I æqualis; ſeu rectam datam AB ita {continuare / ſecare}, ut rectangulum ſub {adjecta, & ſub compoſita ex data & adjecta / ſegmentis ipſius} æquale ſit quadrato rectæ datæ I; geometrice ſolvuntur in *Scholiis in Lib.* II. §. 66. 74. ſq; algebraice, paritær ac Problemata VI. VII, in *Lhuiliers Anleitung zur Elementar-Algebra.* §. 78. 79. 85. 87. 83. 107. 108.

Cum ſumma quadratorum duarum æqualium rectarum dupla ſit parallelogrammi rectanguli ſub ipſis; ſumma autem quadratorum duarum inæqualium rectarum ſit duplo rectangulo ſub ipſis major (*Schol. in Lib.* II. §. 84.): ut fieri poſſit, quod jubetur; oportet non ſit $AB^q < 2I^q$, ſeu non ſit $I^q > \frac{1}{2}AB^q$.

Simul liquet: ſi ſit $AB^q = 2I^q$, ſeu $I^q = \frac{1}{2}AB^q$; æqualia fore latera deſiderata: utrumque igitur æquale lateri quadrati, quod ſit ipſius AB^q dimidium; proinde = datæ I.

Quodſi $AB^q > 2I^q$: poſitis P, Q lateribus duorum tunc inæqualium quadratorum, $P > Q$;

ob $P^q + Q^q = AB^q$

$2PQ = 2I^q$

erunt $(P+Q)^q = AB^q + 2I^q$ (II, 4.)

$(P-Q)^q = AB^q - 2I^q$ (II, 7. *Schol. in Lib.* II. §. 86.).

Quare cum quadrati $2I^q$ latus detur per I, 47. vel §. 166; rectarum $P+Q$, $P-Q$ conſtructio ad invenienda ope I, 47. quadratorum, quæ ſummæ ac differentiæ datorum AB^q, $2I^q$ æquentur, latera reducitur. Tum vero, inventis ſumma ac differentia rectarum P, Q; ipſæ P, Q innoteſcunt juxta §. 30. vel 51. *Schol. in Lib.* II.

Sic ab data AB abſciſſa AC = datæ I, ipſique in C ducto perpendiculo $CE = AC = I$; fit (I, 47.) $AE^q = 2AC^q = 2I^q$: & ob $AB^q > 2I^q$ (*ſupp.*) $> AE^q$, erit $AB > AE$.

Jam $AD = AE$ abſciſſa ex AB; & huic in A, D conſtitutis normalibus AF, DH, quas circulus centro A, intervallo AB, deſcriptus in punctis F, H ſecat; tum junctis DF, AH rectis: ſunt (I, 47.) $DF^q = AF^q + AD^q = AB^q + 2I^q$, $DH^q = AH^q - AD^q = AB^q - 2I^q$.

Quare $DF = P+Q$, $DH = P-Q$. Ab DF igitur abſciſſa $DK = DH$, & reſidua FK bifariam in G ſecta: fiunt $DG = P$, $GF = Q$ (*Schol. in Lib.* II. §. 51.).

§. 176.

Conſtructio trianguli rectanguli ABC, cujus hypotenuſa datæ AB, rectangulum ſub cathetis AC, CB quadrato datæ I æquetur (*Fig.* 76. 77.): ob rectg. $AB \times CD = AC \times CB$ (§. 147. n°. 3.) $= I^q$ (CD ex C demiſſa normali in AB), proinde $AB : I = I : CD$ (VI, 17.), perpendiculum igi-

tur CD datum (VI, 11.); reducitur ad *Problema*: Deſcribere triangulum ad verticem rectangulum, cujus baſis atque altitudo dantur; quod æque ac alterum generalius: Deſcribere triangulum, cujus baſis, altitudo, & angulus ad verticem quicunque dantur, ope Problematum I, 31. III, 33. conſtruitur.

Trianguli nempe rectanguli, ſuper data baſi ſeu hypotenuſa AB, & cum altitudine data, (cui æquale perpendiculum ubicunque ſuper AB, ex. gr. BE in B, conſtituitur) deſcribendi vertex C erit ad occurſum peripheriæ ſemicirculi ſuper AB deſcripti ac rectæ EH per E ipſi AB parallelæ; quæ utique ſibi mutuo occurrunt, dummodo altitudo data BE non ſit $\triangleright \frac{1}{2}AB$: nimirum ſe invicem tangunt in puncto C biſectionis ſemicirculi (*Fig.* 76.), quando $BE =$ hujus ſemidiametro $\frac{1}{2}AB$ (III, 27. I, 13. 29. 33. 34. III, 16.); quando autem $BE \triangleleft \frac{1}{2}AB$ (*Fig.* 77.), ſe mutuo ſecant in duobus punctis C, c (*Schol. in Lib.* II. §. 75.), quibus ac terminis baſis AB interjacent arcus ſemicirculi æquales BC, Ac (I, 29. III, 26.).

Priore igitur caſu (*Fig.* 76.) unum triangulum æquicrurum ABC; altero (*Fig.* 77.) duo triangula ſcalena ABC, ABc Problemati ſatisfaciunt; hæc vero ſitu tantum, non longitudine laterum diverſa (III, 29.).

§. 177.

Atqui ſub determinatione *Problematis* VI. (§. 175.) I^q non $\triangleright \frac{1}{2}AB^q$, ſi rectis AB, I fit perpendiculum BE tertium proportionale, juxta §. 119. ſq. ab producta AB ac normali ipſi in B ducta abſcindendo $BF = BG = I$, & rectam FE ipſi AG parallelam agendo; ob $AB \times BE = I^q$ (VI, 17.) $\trianglelefteq \frac{1}{2}AB^q$, fit $BE \trianglelefteq \frac{1}{2}AB$. Unde juxta §. 176. abſolvitur ſolutio Problematis.

Priore caſu, quo $I^q = \frac{1}{2}AB^q$ (*Fig.* 76.), ab perpendiculo, datam hypotenuſam AB bifariam in D ſecante, $DC = DA = DB$ abſcindere; vel ſuper data AB triangulum æquicrurum ABC, cujus crura ſingula ſint $= I$, deſcribere ſufficit. Ita enim, ſi poſterius fit, immediate eſt $AC \times CB = \left\langle \begin{matrix} AC^q \\ CB^q \end{matrix} \right\rangle = I^q$; atque, ob $AB^q = 2I^q$ (*ſupp.*) $= AC^q + CB^q$, angulus ACB fit rectus (I, 48.). Si prius: eſt $CD^q = AD \times DB$, ideoque angulus ACB rectus (§. 160. 162.); & $AC \times CB = AC^q$ (I, 4.) $= AD^q + DC^q$ (I, 47.) $= 2AD^q = \frac{1}{2}AB^q$ (*conſtr.* & *Schol. in Lib.* II. §. 13.) $= I^q$.

§. 178.

§. 178.

Eo, qui §. 176. ſq. traditur, modo ROB. SIMSON in Prop. 88. *Datorum Euclidis*, correctius & auctius ab ipſo Glasguæ 1762. editorum, parallelogrammum rectangulum deſcribere docet, cujus area & ſumma quadratorum laterum dantur. Conf. in verſione eorundem Germanica (Stuttgart, 1780.) Problema 23. p. 235. ſq.

§. 179.

PROBLEMA VII. Datis (*Fig.* 78.) latere AB quadrati æqualis differentiæ duorum inæqualium quadratorum, & latere I quadrati æqualis rectangulo ſub ipſorum lateribus; invenire hæc latera: ſeu conſtruere triangulum rectangulum, cujus unus cathetus datæ rectæ AB, & rectangulum ſub hypotenuſa alteroque catheto factum quadrato rectæ datæ I æquetur: ſeu deſcribere parallelogrammum rectangulum, cujus unum latus datæ rectæ AB; rectangulum vero ſub diagonali & ſub altero latere ſit quadrato datæ I æquale.

Ad latus datum AB factum ſit triangulum ABC in B rectangulum, ſic ut ſit rectg. $AC \times CB = I^q$.

Hypotenuſæ ejus AC in C normalis ducatur CD, productæ AB in D occurrens. Erit rectg. $AB \times CD = AC \times CB$ (§. 147. n°. 4.) $= I^q$; unde $AB : I = I : CD$ (VI, 17.); ideoque CD datur (VI, 11.)

Sed CD^q = rectg. $AD \times DB$ (§. 147. n°. 2.). Quare hoc rectangulum eſt quadrato rectæ datæ æquale. Proinde, cum & laterum ipſius AD, DB differentia AB detur; datur AD (*Schol. in Lib. II.* §. 66.).

Ob angulum autem ACD rectum (*conſtr.*) eſt punctum C ad peripheriam ſemicirculi ſuper diametro AD deſcripti (III, 31. *Conv.*), idemque (*ſupp.*) eſt ad perpendiculum datæ AB in B erectum. Proinde datur hoc punctum C.

Compoſitio ex analyſi præcedente hæc conſequitur.

Primum datis AB, I invenitur tertia proportionalis BH juxta §. 125: ab perpendiculo, rectæ AB in B conſtituto, $BF = I$ abſcindendo; & rectæ AF in F ducendo normalem FH, quæ productæ AB in H occurrit.

Tum juxta §. 66. *Schol. in Lib. II.* datæ AB in directum adjicitur BD ſic, ut fiat rectg. $AD \times DB = BH^q$: rectam AB bifariam in E ſecan-

cando; ab perpendiculo FB abſcindendo $BG = BH$; & ab producta AB abſcindendo $ED = EG$.

Quo facto ſemicirculus deſcribitur ſuper diametro AD; & ad punctum C, ubi ejus peripheria perpendiculum BF ſecat, ducitur AC recta.

Sic enim, juncta CD recta, eſt $CD^q = AD \times DB$ (§. 147. n°. 6.)
Sed ob AB bifariam in E ſectam eſt rectg. $AD \times DB = ED^q - EB^q$ (II, 6)
$= EG^q - EB^q$ (*conſtr.*)
$= BG^q$ (I, 47.)
$= BH^q$ (*conſtr.*)
Quare $CD^q = BH^q$; $CD = BH$; rectg. $AB \times CD = AB \times BH$
$= BF^q$ (§. 147. n°. 1.)
Ideoque & rectg. $AC \times CB = AB \times CD$ (§ 147. n°. 4.) eſt $= BF^q = I^q$ (*conſtr.*)

§. 180.

Quodſi rectæ §. 179. inventæ AC, CB ſub angulo recto junguntur; ab producta DC abſcindendo $CK = CB$: obtinetur $\left\{\begin{matrix}\text{triangulum}\\\text{parallelogrammum}\end{matrix}\right\}$ rectangulum $\left\{\begin{matrix}ACK\\ACKL\end{matrix}\right\}$; cujus area $= \left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}I^q\\I^q\end{matrix}\right\}$, & differentia quadratorum $\left\{\begin{matrix}\text{catheterum}\\\text{laterum contiguorum}\end{matrix}\right\} = AB^q$.

Parallelogrammi, cujus area & differentia quadratorum laterum dantur, ſub quocunque angulo dato deſcribendi latera invenire EUCLIDES in *Dator.* 87. elegante analyſi, immediate huic problematis enunciato adaptata, docet; quæ vero ad parallelogrammum rectangulum applicata paulo eſt præcedente (§. 179.) prolixior, ac præter alias VI, 22^dam *Elem.* ſupponit.

§. 181.

PROBLEMA VIII. Conſtruere triangulum rectangulum; cujus dantur ſumma hypotenuſæ & unius catheti, ac ſumma alterius catheti & perpendiculi ab vertice anguli recti in hypotenuſam demiſſi.

Sit (*Fig.* 79.) ABC triangulum ad C rectangulum deſcribendum; in quo nempe $AB + BC =$ datæ rectæ G, & $AC +$ perpendiculum $CD =$ datæ H.

Cum

Cum (§. 93. n°. 1.) ſit $BA : AC = BC : CD$
ideoque etiam (V, 12.) $AB+BC : AC+CD = BA : AC$
proinde $AB+BC \gtrless AC+CD$, ob $BA \gtrless AC$:
ut fieri poſſit, quōd jubetur, debet eſſe $G \gtrless H$.

Continuentur AB, AC, donec ſint $BF = BC$, $CE = CD$; itaque $AF = AB+BC$, $AE = AC+CD$.

Erunt (*demonſtr.*) $FA : AE = BA : AC$:
hinc EF, CB ſunt parallelæ (§. 22.); angulus $E = ACB$ (I, 29.) eſt rectus; & datur triangulum AEF, cujus hypotenuſa $AF = G$, cathetus $AE = H$ dantur.

Porro ob $CB = BF$ (*conſtr.*) eſt angulus $BFC = BCF$ (I, 5.);
& ob parallelas BC, FE (*dem.*) $BCF = CFE$ (I, 29.):
quare $BFC = CFE$.
Poſitione igitur datur recta FC datum angulum AFE bifariam ſecans (I, 9.); & per interſectionem ipſius cum poſitione data AE datur punctum C; per quod ducta rectæ EF parallela CB finit triangulum ABC.

In ſemicirculo itaque ſuper recta $AF =$ datæ G deſcripto aptabitur AE recta $=$ datæ H: tum, juncta FE recta, bifariam ſecabitur angulus AFE per rectam FC; & per punctum C, ubi hæc rectæ AE occurrit, agetur CB ipſi EF parallela. Erit ABC triangulum deſideratum.

Quippe ob angulum $BCF = CFE$ (I, 29.) $= CFB$ (*conſtr.*) eſt $CB = BF$ (I, 6.); igitur $AB+BC = AF = G$.

Angulus $ACB = E$ (I, 29.) $=$ recto (III, 31.).

Ex C in AB demiſſo perpendiculo CD, eſt
$BA : AC = BC : CD$ (§. 93. n°. 1.)
$= AB+BC : AC+CD$ (V, 12.);
pariterque, ob parallelas CB, EF eſt
$BA : AC = FA : AE$ (§ 22.):
igitur $AB+BC : AC+CD = FA : AE$ (V, 11.):
atque, ob $AB+BC = FA$ (*dem.*), etiam $AC+CD = AE$ (V, 14.) $= H$.

§. 182.

Similiter, ex AB, AC abſciſſis BC, CD; & loco 12ma quinti *Elem.* adhibita 19na; ſolvitur *Problema*: quo differentiæ hypotenuſæ AB & catheti BC, atque alterius catheti AC & perpendiculi CD, dantur.

Quodſi

Quodſi autem, alterutra ſumma §. 181. data, alterius ſummæ loco differentia datur:

ob $BA:AC = BA\times AD : CA\times AD$ (VI, 1.)

$= AC^q : CA\times AB - \begin{cases} CA\times DB \\ BC\times CD \end{cases}$ (§. 147. n°. 2. 4.)

& $CA\times AB - BC\times CD = (AC\pm CD)(AB\mp BC)$ (II, 1.)

quoniam $AC\times CB = AB\times CD$ (§. 147. n°. 3.);

poſitis $AC\pm CD = H$, $AB\mp BC = G$, fieri debet

$BA : AC = AC^q : G\times H$

$2G\times AB : G\times AC = 2AC^q : G\times H$ (VI, 1. V, 4.)

$2G\times AB : 2AC^q = G\times AC : G\times H$ (V, 16.)

$= AC : H$ (VI, 1.):

&, ob $(AB\mp BC)^q + AC^q = AB^q \mp 2AB\times BC + \begin{cases} BC^q + AC^q \\ AB^q \end{cases}$ (II, 7. 4.) (I, 47.)

$= 2(AB^q \mp AB\times BC)$

$= 2(AB\mp BC)AB$ (II, 1.)

ſeu $G^q + AC^q = 2G\times AB$,

oportet, fiat

$G^q + AC^q : 2AC^q = AC : H$;

quod limites geometriæ elementaris tranſcendit.

§. 183.

Problema IX. (*) Conſtruere triangulum rectangulum, cujus ſumma cathetorum datæ rectæ H, & perpendiculum ab vertice anguli recti in hypotenuſam demiſſum datæ I æquentur (*Fig.* 80.)

Cum in triangulo ABC (*Fig.* 76.) ad C rectangulo & æquicruro ſit $AC+CB = 2AC$; ideoque $(AC+CB)^q = 4AC^q = 4(AD^q+CD^q) = 8CD^q$, ob $CD = AD$ (IV, 6.): in non-æquicruro autem (*Fig.* 77.) ſit

$AC^q + CB^q = AD^q + DB^q + 2CD^q$ (I, 47.)

$= 2(LB^q + LD^q + CD^q)$ bifariam in L diviſa AB (II, 9.)

$> 2(LB^q + CD^q)$

$> 4CD^q$, ob $LB = LC > CD$

& $2AC$

(*) Problemata IX. X. XI. XII. XIII. algebraice, cum deductis inde conſtructionibus geometricis, ſoluta exſtant in Newtoni *Arithmetica univerſali*; Cap. III. inſcripto: *Quomodo quæſtiones geometricæ ad æquationem rediguntur*; Probl. 6. 7. 5. 4. 3.

$$\& \; 2AC \times CB = 2AB \times CD \; (\S.\ 147.\ n^{\circ}.\ 3.)$$
$$= 4LB \times CD$$
$$\trianglerighteq 4CD^q;$$

ideoque (II,4.) $(AC+CB)^q \trianglerighteq 8CD^q$:

ut, quod jubetur, fieri poſſit; oportet, non ſit $H^q \trianglelefteq 8I^q$.

Sit (*Fig.* 80.) ABC triangulum deſideratum; cujus catheti $AC+CB=H$, perpendiculum $CD=I$.

Ob $AB^q = AC^q+CB^q$ (I, 47.)

& $\left.\begin{matrix} 2AB \times CD \\ 2AB \times I \end{matrix}\right\} = 2AC \times CB$ (§. 147. n°. 3.)

erit $AB^q+2AB \times I = (AC+CB)^q$ (II, 4.) $= H^q$.

Ab producta BA abſcindatur $AE=EF=I$; itaque $AF=2I$.

Erit $\left.\begin{matrix} AB^q+BA \times AF \\ \text{ſeu (II, 3.) } FB \times BA \end{matrix}\right\} = H^q$.

Unde, ob datam H, datamque $FA=2I$ differentiam laterum FB, BA rectanguli $FB \times BA$, innoteſcit hypotenuſa AB trianguli ABC; ipſumque triangulum, ob datum etiam perpendiculum $CD=I$.

Nempe juxta §. 66. *Schol. in Lib.* II. rectæ $AF=2I$, bifariam in E ſectæ, normalis in A conſtituetur $AG=H$; & ab producta FA abſcindetur $EB=EG$: tum ab perpendiculo AG abſciſſa $AK=I$, per K parallela agetur rectæ AB ad occurſum usque ſemicirculi ſuper diametro AB deſcripti; & ad hunc rectæ ab punctis A, B ducentur (§. 176.).

Reipſa autem ſemicirculum ſuper diametro AB deſcriptum tangit vel ſecat recta ipſi AB per K parallela: cum, ob $8I^q \equiv H^q$ (*determ.*), h. e. $8AK^q \equiv AG^q$ (*conſtr.*), ideoque $9AK^q \equiv AG^q + AE^q$ ſeu (I, 47.) EG^q, $3AK^q \equiv EG$ ſeu EB, $2AK \equiv AB$, ſit $AK \equiv \frac{1}{2}AB$.

§. 184.

Eodem redeunt Problematis hujus conſtructiones: quam GHETALDUS (l. c. *Lib.* III *Probl.* IV. p. 110. ſqq.) ex analyſi partim geometrica, partim algebraica; & concinnior paulo, quam WOLFIUS (*Elementa Matheſeos univerſæ.* Tom. I. Halæ 1730. p. 397. ſq.) ex analyſi prolixiore mere algebraica, ſed determinatione omiſſa, deducunt. GHETALDUS determinationem, geometrice ſeorſim demonſtratam, ſic enunciat: "Tripla perpendicularis trianguli rectanguli, ab angulo recto in baſim cadens,

non

non eſt major quam recta, cujus quadratum æquale eſt quadratis aggregati crurum & perpendicularis."

§. 185.

Simili, qua §. 183, ratione, loco 4^tæ ſecundi *Elem.* applicando 7^mam, ſolvitur *Problema* determinationi haud obnoxium: quo, præter perpendiculum ex vertice anguli recti in hypotenuſam demiſſum, differentia cathetorum trianguli rectanguli datur.

Tum quippe, datis quibuscunque H = differentiæ cathetorum, I = perpendiculo, ob $\left.\begin{matrix} AB^q - 2AB \times I \\ AB(AB - 2I) \end{matrix}\right\} = H^q$ (*Schol. in Lib.* II. §. 86.), datur rectangulum ſub AB & $AB - 2I$, cujus differentia laterum $= 2I$: conſtructione igitur juxta §. 66. *Schol. in Lib.* II. facta, prodit $AB \triangleright 2I$, $I \triangleleft \frac{1}{2}AB$.

Problema hoc ſuo etiam more ſolvit GHETALDUS l. c. *Lib.* III. *Probl.* III. p. 109. ſq.

§. 186.

PROBLEMA X. Conſtruere triangulum rectangulum; cujus ſumma cathetorum datæ rectæ H; & ſumma hypotenuſæ ac perpendiculi, in eam ab anguli recti vertice demiſſi, datæ G ſit æqualis. (*Fig.* 81.).

Ob $BA : AC = BC : CD$ in triangulo ABC ad C rectangulo (§. 93. n°. 1.); & BA maximam, CD minimam quatuor rectarum (I, 19. *Coroll.*); ideoque $BA + CD \triangleright AC + CB$ (V, 25.): debet eſſe $G \triangleright H$.

Porro ob $AC^q + CB^q = AB^q$ (I, 47.)

$2AC \times CB = 2AB \times CD$ (§. 147. n°. 2.)

ideoque $(AC + CB)^q = AB^q + 2AB \times CD$ (II, 4.)

$8(AC + CB)^q = 8(AB^q + 2AB \times CD)$

ſed $(AC + CB)^q$ VII $8CD^q$ (§. 183.)

proinde $9(AC + CB)^q$ VII $8(AB + CD)^q$ (II, 4.):

debet eſſe $9H^q$ VII $8G^q$; ſeu oportet, non ſit $8G^q \triangleright 9H^q$.

Sit ABC triangulum quæſitum: cujus catheti $AC + CB = H$; hypotenuſa AB + perpendiculum $CD = G$.

Ob $AB^q + 2AB \times CD + CD^q = (AB + CD)^q$ (II, 4.) $= G^q$

& $AB^q + 2AB \times CD = (AC + CB)^q$ (*demonſtr.*) $= H^q$

manet $CD^q = G^q - H^q$

Datur

Datur itaque perpendiculum CD; eoque ab G ablato, hypotenusa AB; proinde triangulum ABC (§. 176.).

Nimirum in semicirculo, super recta $BE = G$ descripto, aptata recta $BF = H$ (IV, 1.); ob $hF^q = EB^q - BF^q$ (III, 31. l, 47.), erit $EF =$ perpendiculo: & ab EB abscissa $EA = EF$, residua AB erit hypotenusa trianguli describendi. Huic igitur in puncto A ducta normali $AK = Al = hF$; rectæ ipsi AB per K parallelæ occursus cum semicirculo super AE descripto verticem C trianguli designabit (§. 176.): cum (*determ*) sit $8G^q \gtrless H^q$, h. e. (*constr.*) $\left.\begin{matrix} 8EB^q \\ 8(BF^q + EF^q) \end{matrix}\right\} \gtrless 9BF^q$; ideoque $8EF^q \gtrless BF^q$, $9EF^q \gtrless \left\{\begin{matrix} BF^q + EF^q \\ EB^q \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} 3EF \\ 3EA \end{matrix}\right\} \gtrless EB$, $\left.\begin{matrix} 2EA \\ 2AK \end{matrix}\right\} \gtrless AB$, $AK \gtrless \frac{1}{2}AB$.

Constructionem Problematis hujus valde operosam absque analysi tradit Thom. Simson (*Treatise of Algebra*. London 1745. p. 400. sq.): ejusdem solutionem algebraicam & compositionem inde deductam, similes Newtonianis, exposuerat p. 244. sq.

§. 187.

Quodsi dantur $AB - CD = G$, $AC - CD = H$;
ob $CD < CB$, ideoque $AB - CD > AB - CB$
& $AB > AC$ $> AC - CB$;
pariter oportet, sit $G > H$.

Ceterum, 7ma secundi *Elem.* adhibita loco 4ta, rursus prodit $CD^q = G^q - H^q$.

Unde, in semicirculo super $EB = G$ descripto aptata $BF = H$, fit $EF = CD$; atque ipsi BE in directum adjecta EF, invenitur AB; ac triangulum constituitur juxta §. 176; cum, ob $EF < EB$, sit $2EF < BE + EF$, $EF < \frac{BE+EF}{2}$.

§. 188.

Datis autem vel $AB + CD = G$, $AC - CB = H$;
vel $AB - CD = G$, $AC + CB = H$;

ob $\left.\begin{matrix} (AC \mp CB)^q \\ H^q \end{matrix}\right\} = AB^q \mp 2AB \times CD$ (II, 4. 7. l, 47. & §. 147. n°. 3.)
$= AB(AB \mp 2CD)$ (II, 1.)

atque $AB \mp 2CD = AB - 2G + \left\{\begin{matrix} 2G \\ 2AB + 2CD \end{matrix}\right\} \mp 2CD$
$= 3AB - 2G = 3(AB - \frac{2}{3}G)$;

fieri debet $3AB(AB-\frac{2}{3}G) = H^q$
$AB(AB-\frac{2}{3}G) = \frac{1}{3}H^q$.

Juxta §. 166. igitur invento latere quadrati $= \frac{1}{3}H^q$; tum juxta §. 66. *Schol. in Lib.* II. inventis lateribus rectanguli $= \frac{1}{3}H^q$, cujus differentia laterum $= \frac{2}{3}G$: majus latus hujus rectanguli erit hypotenusa AB trianguli describendi; altitudo autem $CD = \left.\begin{matrix} G-AB \\ AB-G \end{matrix}\right\}$. Priore autem casu, ob $AB \rhd \frac{2}{3}G$, fit $CD = G-AB \lhd \frac{1}{3}G \lhd \frac{1}{2}AB$.

Pariterque posteriori, quo $H^q = (AC+CB)^q \overline{\rhd} 8CD^q$ VII $8(AB-G)^q$

proinde $\left.\begin{matrix} H^q \\ 3AB(AB-\frac{2}{3}G) \end{matrix}\right\} + (AB-G)^q$ VII $9(AB-G)^q$

h. e. $\left.\begin{matrix} 4AB^q-2G\times AB+G^q \\ (2AB-G)^q \end{matrix}\right\}$ VII $9(AB-G)^q$

seu $2AB-G$ VII VII $3(AB-G)$

est $2G$ VII AB

G VII VII $\frac{1}{2}AB$

ideoque $CD = AB-G$ A VII VII $\frac{1}{2}AB$.

§. 189.

Problema XI. Construere triangulum rectangulum: cujus hypotenusa sit recta data AB; summa autem cathetorum ac perpendiculi ex vertice anguli recti in hypotenusam demissi sit datæ rectæ H æqualis (*Fig.* 82.).

Cum in triangulo ABC ad C rectangulo (*Fig.* 76. 77.) sit (I, 20.) $AC+CB$, tantoque magis $AC+CB+CD \rhd AB$: primum debet esse data $H \rhd AB$.

Porro in triangulo rectangulo æquicruro ABC (*Fig.* 76.) sunt

$2(AC+CB) = 4AC$
$2CD = AB$
ideoque $2(AC+CB+CD) = 4AC+AB$
$2(AC+CB+CD)-AB = 4AC$
$(2(AC+CB+CD)-AB)^q = 16AC^q$ (*Schol. in Lib.* II. §. 6.)
$= 8(AC^q+CB^q) = 8AB^q$ (I, 47.)

In triangulo autem rectangulo non-æquicruro ABC (*Fig.* 77.), ob $2CD \lhd AB$ (III, 3. 15.),

est

eſt $2(AC+CB+CD)-AB < 2(AC+CB)$;
igitur $(2(AC+CB+CD)-AB)^q < 4(AC+CB)^q$:
& $4(AC+CB)^q = 4(AC^q+CB^q)+8AC\times CB$ (II, 4.)
$= 4AB^q+8AB\times CD$ (I, 47. & §. 147. n°. 3.)
$< 8AB^q$, ob $2CD<AB$, ideoque $8AB\times CD<4AB^q$.
Quare tanto magis $(2(AC+CB+CD)-AB)^q < 8AB^q$.

Oportet igitur, ex altera parte non ſit
$(2H-AB)^q > 8AB^q$
ſeu $(H-\frac{1}{2}AB)^q > 2AB^q$
h. e. $H-\frac{1}{2}AB$ major non ſit diagonali quadrati, cujus latus eſt AB.

Sit jam (*Fig.* 82.) ABC triangulum ſuper data hypotenuſa AB conſtruendum, in quo $AC+CB+CD=H$.

Ob $BA:AC = BC:CD$ (§. 93. n°. 1.)
$= AB+BC:AC+CD$ (V, 12.)
$BA: BA+AC$
$2BA: 2(BA+AC)$ $\Big\} = AB+BC:AB+BC+CA+CD$ (V, 18. 15.)
eſt $2(BA+AC)(AB+BC) = 2BA(AB+BC+CA+CD)$ (VI, 16.)
$= EB\times BF$
in directum ipſi BA adjectis $AE=AB$, $AF=BC+CA+CD=H$.

Sed $2(BA+AC)(AB+BC) = (BA+AC)(2AB+2BC)$
$= (BA+AC)(BA+AC+2BC+(BA-AC))$
$= (BA+AC)^q+2BC(BA+AC)+\begin{cases} BA+AC)(BA-AC) \\ BA^q-AC^q \text{ (II, 5. } Coroll.) \\ BC^q \text{ (I, 47.)} \end{cases}$
$= (BA+AC+CB)^q$ (II, 4.)
Igitur $(BA+AC+CB)^q = EB\times BF$
$EB:BA+AC+CB = BA+AC=CB:BF$ (VI, 17.).

Quare, cum dentur $EB=2AB$, $BF=BA+\begin{cases}AF\\H\end{cases}$ (*conſtr.*), datur trianguli perimeter $BA+AC+CB$ (VI, 13.): qua ab $BF=BA+AC+CB+CD$ ablata, manet trianguli altitudo CD; & trianguli deſcriptio reducitur ad § 176.

Datæ ſcilicet hypotenuſæ BA in directum adjectis $AE=AB$, $AF=H$; tum juxta n. 126. ſuper BF deſcripto ſemicirculo, cui in G occurrit normalis rectæ BF in E ducta EG; & facta $BL=BG$: ab perpendiculo EG abſcindetur $EK=FL$; ac (§. 176.) per K agetur rectæ BF parallela, ſemicirculo ſuper AB deſcripto in C occurens:

cum

cum ob $(2H-AB)^q$
h. e. (*constr.*) $(2FA-AB)^q$ } $\equiv 8AB^q$ (*determ*)
seu (II, 7.) $4FA^q-4FA\times AB+AB^q$
sit $4FA^q+4FA\times AB+AB^q \equiv 8(FA\times AB+AB^q)$

h. e. (II, 4.) $(2FA+AB)^q \equiv \begin{cases} 8FB\times BA \text{ (II, 3.)} \\ 4FB\times BE \text{ (constr.)} \\ 4BG^q \text{ (§. 147. n°. 6.)} \end{cases}$

ideoque $2FA+AB \equiv \begin{cases} 2BG \\ 2BL \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} 2FA+2AB \\ 2FB \end{matrix}\right\} \equiv 2BL+AB$

$\left.\begin{matrix} 2FL \\ FL \\ FK \end{matrix}\right\} \equiv AB$

$\equiv \frac{1}{2}AB.$

Reipsa sic (ductis AC, CB ac perpendiculo CD), ob BE bifariam in A sectam (*constr.*), eique in directum adjectam EL,

est $EL^q+BL^q=2AL^q+2AB^q$ (II, 10.)

Sed $BL^q=BG^q=EB\times BF$ (§. 147. n°. 6.) $=2AB\times BF=2BA\times AF+2AB^q$ (II, 3.)

Quare $EL^q+2BA\times AF+2AB^q=2AL^q+2AB^q$

$EL^q+\left\{\begin{matrix} 2BA\times AF \\ 2BA\times AL+2BA\times LF \end{matrix}\right\}=2AL^q$

Atqui $EL^q+2BA\times AL=EL^q+2EA\times AL=AL^q+AE^q$ (II, 7.) $=AL^q+AB^q$

& $2BA\times LF=2AB\times EK=2AB\times CD$ (*constr.* I, 34.)

Igitur $AL^q+AB^q+2AB\times CD=2AL^q$

$AB^q+2AB\times CD=AL^q.$

Denique $AC^q+CB^q=AB^q$ (III, 31. I, 47.)

$2AC\times CB=2AB\times CD$ (§. 147. n°. 3.)

Proinde (II, 4.) $(AC+CB)^q=AB^q+2AB\times CD=AL^q$

$AC+CB=AL$

& ob $CD=FK=LF$

$AC+CB+CD=AF=H$ (*constr.*).

§. 190.

Proportio $EB:BA+AC+CB=BA+AC+CB:\left\{\begin{matrix} BF \\ BA+AC+CB+CD \end{matrix}\right.$

seu $2AB$: Perimet. triang. = Perimet. : Perimet. $+CD$.

qua solutio præcedens nititur, sic etiam demonstratur.

Triangulo ad C rectangulo ABC (*Fig.* 83.) inscribatur circulus (IV, 4.): cujus centrum sit S; & qui trianguli latera BA, AC, CB contingat in punctis M, N, O.

Erunt

Erunt $AM=AN$, $BM=BO$, $CN=CO$, ang. $NCS=SCO$ (IV, 4. *Dem. et Coroll.*): igitur anguli NCS, SCO semirecti; pariterque (I, 32.) anguli CSN, CSO, ob rectos N, O (III, 18.); proinde $\left.\begin{matrix}CN\\CO\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}SN\\SO\end{matrix}\right.$ (I, 6.).

Hinc $BA+AC+CB$ seu perimeter trianguli $\Big\}=\Big\{$ $2AB+2SN$ duplo aggregato hypotenusæ et radii circuli triangulo inscripti.

Atqui, ob $SM=SN=SO$, triangulum $ABC=BAS+ACS+CBS$ æquale est triangulo, cujus basis perimetro $BA+AC+CB$, altitudo rectæ SN æquatur (I, 37. *Coroll.*). Aequalia igitur sunt triangula, unum sub basi AB & altitudine CD, alterum sub basi $BA+AC+CB$ & altitudine SN: ideoque

$$AB : \left\{\begin{matrix}BA+AC+CB\\\text{Perimet.}\end{matrix}\right\} = SN : CD \text{ (§. 145.)}$$

$$2AB : \text{Perimet.} = 2SN : CD \text{ (V, 4.)}$$

$$= \left\{\begin{matrix}2AB+2SN\\\text{Perimet.}\end{matrix}\right\} : \text{Perimet.} + CD \text{ (V, 12.)}$$

§. 191.

Paulo prolixior eâ, quæ §. 189. traditur, est constructio, quam Rob. Simson in *Appendice Operum reliquorum* (Glasguæ 1776. p. 5. sqq.) analysi sequente eruit.

Ob $BA^2 = AC^2 + CB^2$ (I, 47.)

& $2BA \times CD = 2AC \times CB$ (§. 147. n°. 3.)

est $BA^2+2BA\times CD = (AC+CB)^2$ (II, 4.)

$$BA^2+2(BA+AC+CB+CD)CD = (AC+CB)^2+2(AC+CB+CD)CD$$
$$= (AC+CB+CD)^2+CD^2$$

seu $BA^2+2BF\times CD = AF^2+CD^2$, facta $AF=AC+CB+\frac{1}{2}CD$

Unde $\left.\begin{matrix}2BF\times CD-CD^2\\(2BF-CD)\,CD\end{matrix}\right\} = AF^2-BA^2$

$= BF\times FE$ (II, 5. *Coroll.*), facta $AE=AB$.

Quare, cum dentur BF, FE; CD erit latus minus rectanguli $=BF\times FE=FG^2$ (§. 147. n°. 6.), cujus summa laterum $=2BF$; seu erit segmentum minus rectæ $=2BF$ in inæqualia sic divisæ, ut rectangulum sub segmentis æquale sit rectangulo sub datis BF, FE, seu quadrato datæ FG (*Schol. in Lib.* II. §. 74. sq.).

§. 192.

Problema XII. Constructe triangulum rectangulum: cujus perimeter datæ rectæ P; & perpendiculum, ab vertice anguli recti in hypotenusam demissum, datæ I æquentur. (*Fig.* 82.)

Ob

Ob $BA \gtreqless 2CD$ in triangulo ABC ad C rectangulo (*Fig.* 76. 77.) & $AC+CB > 2CD$ (I, 19. *Coroll.*)
ideoque $BA+AC+CB > 4CD$: debet esse $P > 4I$.

Præterea, cum in triangulo rectangulo æquicruro ABC (*Fig.* 76.) sit
$BA+AC+CB-2CD = AC+CB = 2AC$, ob $BA=2CD$,
ideoque $(BA+AC+CB-2CD)^q = 4AC^q = 8CD^q$;
in non-æquicruro autem ABC (*Fig.* 77.) sit
$BA+AC+CB-2CD > AC+CB$, ob $BA>2CD$,
& hinc $(BA+AC+CB-2CD)^q > (AC+CB)^q$ ac tanto magis (§. 183.) $> 8CD^q$: oportet, non sit $(P-2I)^q < 8I^q$, seu $(P-\frac{1}{2}I)^q < 2I^q$; h. e. $P-\frac{1}{2}I$ minor esse non debet diagonali quadrati, cujus latus $= I$.

Sit (*Fig.* 82.) ABC triangulum desideratum: cujus perimeter $= P$; perpendiculum CD ab vertice anguli recti C in hypotenusam AB demissum $= I$.

Ob Perim.$+CD$: Perimet. $=$ Perimet. : $2AB$ (§. 189 sq.), datur (VI, 11.) $2AB$, & (I, 10.) ipsa hypotenusa AB: ac Problema reducitur ad §. 176.

Rectæ nimirum $BL=P$ in directum adjicietur $LF=I$; rectis $BF=P+I$, $BL=P$, tertia proportionalis BE invenietur juxta §. 124. n°. 1. (in semicirculo super BF descripto aptando rectam $BG=BL$, & ex G in ipsam BF demittendo normalem GE); inventa BE bifariam in A secabitur; ab perpendiculo EG abscindetur $EK=LF=I$; ac (§. 176.) per K agetur rectæ BF parallela, semicirculo super AB descripto in C occurrens: cum, ob $8I^q \gtreqless (P-2I)^q$ (*determ.*)
h. e. $8LF^q \gtreqless \begin{cases}(BL-2LF)^q & (\textit{constr.}) \\ BL^q-4BL\times LF+4LF^q & (\textit{Schol. in Lib.}\text{ II. §. 86. 2. 6.})\end{cases}$,
sit $4(BL\times LF+LF^q) \gtreqless BL^q$ seu BG^q
$4BF\times FL \gtreqless FB\times BE$ (II, 3. & §. 147. n°. 6.)
$4FL \gtreqless BE$; $2FL \gtreqless AB$; $\frac{FL}{EK} \gtreqless \frac{1}{2}AB$.

Atque ita fieri $AC+CB=AL$, proinde $BA+AC+CB=BL=P$; eodem modo, quo ad calcem §. 189, demonstratur.

§. 193.

Problema XIII. Construere triangulum rectangulum; cujus perimeter sit datæ rectæ P; & area quadrato datæ I æqualis. (*Fig.* 84.)

Ob perpendiculum CD ex vertice anguli recti C in hypotenusam AB

AB demiſſum $\leqq \frac{1}{2}AB$ (*Fig.* 76. 77.); ideoque rectg. $AB \times CD \leqq \frac{1}{2}AB^q$, & aream trianguli $ABC \leqq \frac{1}{4}AB^q$ (I, 41.): debet eſſe $I^q \leqq \frac{1}{4}AB^q$, $I \lessdot \frac{1}{2}AB$, $4I \leqq 2AB$.

Sed $2AB \lessdot BA+AC+CB$, ob $AB \lessdot AC+CB$ (I, 20.). Oportet itaque, ſit $4I \lessdot P$; $I \lessdot \frac{1}{4}P$.

Porro debet eſſe $4I+2SN \leqq 2AB+2SN$ (*Fig.* 83.) ſeu P (§. 190.) ideoque $4P \times I+2P \times SN \leqq P^q$

Sed $2P \times SN = 4 \times$ area trianguli ABC (§. 190.) $= 4I^q$.

Neceſſe igitur eſt, ſit $4P \times I+4I^q \leqq P^q$

$$\left.\begin{matrix} P^q+4P \times I+4I^q \\ (P+2I)^q \end{matrix}\right\} \leqq 2P^q$$

ſeu

$P+2I \leqq$ Diagon. quadrati lateris P.

Sit (*Fig.* 84.) ABC triangulum ad C rectangulum conſtruendum: cujus perimeter $BA+AC+CB=P$; area $\frac{1}{2}AB \times CD = I^q$.

Ob $2AB$: Perim. $=$ Perim. : Perim. $+CD$ (§. 189. ſq.)

ideoque $2AB \times$ Perim. $+ \left\{\begin{matrix} 2AB \times CD \\ 4I^q \end{matrix}\right\} = \overline{\text{Perim.}}^q$ (VI, 17.):

erit, facto rectangulo $Q \times$ Perim. $= 4I^q$, h. e. (VI, 17.) Perim. : $2I = 2I : Q$,

$2AB \times$ Perim. $+ Q \times$ Perim. $= \overline{\text{Perim.}}^q$

$2AB + Q = \text{Perim.}$; $2AB = \text{Perim.} - Q$.

Quare, ob datas perimetrum & (VI, 11.) rectam Q, datur hypotenuſa AB.

Qua inventa, ob $\frac{1}{2}AB \times CD = I^q$, ideoque (VI, 17.) $\frac{1}{2}AB : I = I : CD$, datur etiam (VI, 11.) altitudo CD: & trianguli conſtructio reducitur ad §. 176.

Præmiſſis conſequenter ab recta $BL = P$ abſcindetur tertia proportionalis LE datis BL ac $2I$, juxta §. 124. n°. 1. in ſemicirculo ſuper BL deſcripto rectam $LF = 2I$ (utpote minorem quam BL, ob $4I \lessdot P$ per *determ.*) aptando, atque ex F ipſi BL demittendo normalem FE: tum biſariam in A ſecta reſidua AE, erit AB hypotenuſa trianguli deſcribendi.

Qua rurſus in G biſecta, ab perpendiculo ei in G conſtituto abſcindetur tertia proportionalis GK datis BG & I, juxta §. 23. 119. ſq. ab GA dictoque perpendiculo abſcindendo $GM = GN = I$, & per M agendo rectæ BN parallelam MK.

$$\begin{array}{lll}
\text{Ob} & (P+2I)^q & \equiv 2P^q \ (\textit{determ.}) \\
\text{h. e.} & (BL+LF)^q & \\
\text{seu (II, 4.)} & BL^q+2BL\times LF+LF^q & \equiv 2BL^q \ (\textit{constr.}) \\
 & 2BL\times LF+\left\{\begin{matrix} LF^q \\ BL\times LE \end{matrix}\right\} & \equiv BL^q \ (\text{§. 147. n°. 6.}); \\
\text{igitur} & 2LF+LE & \equiv BL \\
 & 2LF & \equiv BE \\
 & LF \text{ seu } 2I & \\
\text{ideoque} & 2GM & \equiv AB: \\
\text{erunt} & \left.\begin{matrix} GM \\ GN \end{matrix}\right\} & \equiv \tfrac{1}{2}AB \text{ seu } \left\{\begin{matrix} BG \\ GA \end{matrix}\right. \\
\text{pariterque} & GK & \equiv \tfrac{1}{2}AB \ (\text{V, 14.}), \text{ ob } BG:GM:GN=GK.
\end{array}$$

Semicirculo igitur super AB descripto occurrit recta per K ipsi AB parallela (§. 176.): ad quod occursus punctum C ductæ AC, BC rectæ finiunt triangulum ABC quæsitum.

Ob BE enim bifariam in A sectam, ipsique in directum adjectam EL, est $BL\times LE+AB^q=AL^q$ (II, 6.)

Sed $BL\times LE=LF^q$ (§. 147. n°. 6.) $=4GM^q$, ob $LF=2I=2GM$ (*constr.*)

$=4BG\times GK$ (VI, 17.), ob $BG:GM=\left\{\begin{matrix} GN \\ GM \end{matrix}\right\}:GK$ (*constr.* & §. 23.)

$=2AB\times CD$ (*constr.* & I, 34.)

$=2AC\times CB$ (§. 147. n°. 3.)

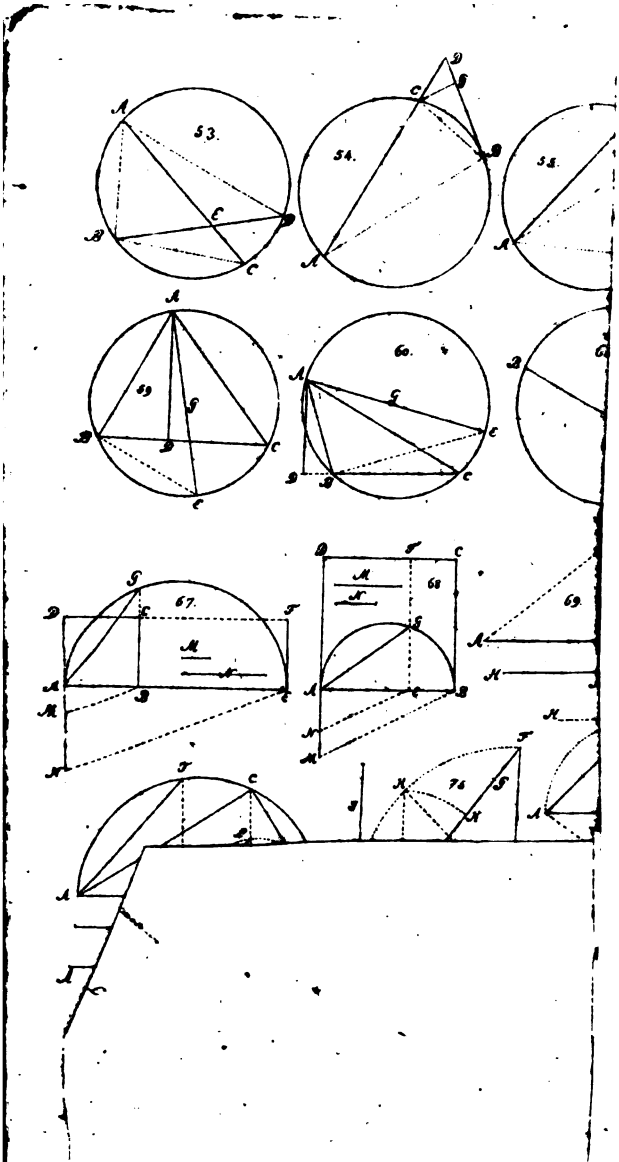
& $AB^q=AC^q+CB^q$ (III, 31. I, 47.)

$$\begin{array}{lll}
\text{Quare} & 2AC\times CB+AC^q+CB^q & \\
\text{seu (II, 4.)} & (AC+CB)^q & \Big\} = AL^q \\
 & AC+CB & = AL \\
\& & BA+AC+CB & = BL = P \ (\textit{constr.}) \\
\text{Atque ob} & BG\times GK & \\
\text{h. e.} & \tfrac{1}{2}AB\times CD & \Big\} = GM^q \ (\textit{demonstr.}) = I^q \ (\textit{constr.});
\end{array}$$

trianguli ABC area est $=I^q$.

§. 194.

Ex analysi præcedente etiam consequitur Problematis XIII. compositio, omissis superfluis, satis concinna, quam THOM. SIMPSON (l. c. p. 326. sq.), demonstratione solum munitam, exhibet.


53.
54.
55.
59.
60.
67.
68
69.
76

SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM QUARTAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCCV.

PUBLICE DEFENDENT

THEOPHILUS ULRICUS OSIANDER, *Stuttgardianus.*
LUDOVICUS ADOLPHUS SCHIKARD, *Tubingenſis.*
CAROLUS FRIDERICUS PLANCK, *Nürtingenſis.*
CHRISTOPHORUS FRIDERICUS SCHÜZ, *Dettingenſis.*
CHRISTIANUS HENRICUS HINTRAGER, *Schopfloceniſis.*

CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ
LITERIS SCHRAMMIANIS.

Acc. Comb.
Magdalene
2-18-28
16615

DEFINITIO V. ET PROPOSITIO XXIII.

§. 195.

Propositionis XXIII (1): Τα ισογωνια παραλληλογραμμα προς αλληλα λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων (2), sensus, ut ex demonstratione ejus patet, hic est: Cognitis laterum circa æquales parallelogrammorum æquiangulorum angulos rationibus mutuis colligi ex iis posse rationem, quam areæ parallelogrammorum invicem habeant. Vel rationem mutuam parallelogrammorum æquiangulorum pendere ab rationibus laterum ipsorum circa æquales angulos, & modum, quo illa ex his eliciatur, Propositio docet.

Eo enim redit momentum demonstrationis, ut, si vel ipsa parallelogrammorum ΑΓ, ΓΖ (*Fig.* 85. 86.) circum æquales angulos ΒΓΔ, ΕΓΗ

(1) Cum Propositio hæc, pariter ac XIVta, nonnisi iterata Propositionis VI, 1. applicatione nitatur, & argumenti XIVta cœpti continuatio ac supplementum sit; transpositione haud apta propositiones inter ad figuras similes pertinentes, nec ullo modo cum ipsa connexas, inserta fuisse videtur.

(2) Legendum vel intelligendum esse εκ των λογων των πλευρων, indicat Theorematis expositio: Εςω ισογωνια παραλληλογραμμα τα ΑΓ, ΓΖ (*Fig.* 85.), ισην εχουσα την υπο ΒΓΔ γωνιαν τη υπο ΕΓΗ· λεγω, οτι το ΑΓ παραλληλογραμμον προς το ΓΖ παραλληλογραμμον λογον εχει των συγκειμενον εκ (των λογων, vel simpliciter των) των πλευρων, τουτε ον εχει η ΒΓ προς την ΓΗ, και του ον εχει η ΔΓ προς την ΓΕ. Vulgaris lectio "ex lateribus compositam" absurda est, inquit *Rob. Simson* (p. 376. in versione *Matthiae* p. 87.).

Ceterum, quod res ipsa & expositio monet, bina intelliguntur parallelogrammorum latera circum æquales angulos, seu generatim (§. 133.) contigua.

Parallelogramma, ut in XIVta (§. 137.), sic etiam sibi mutuo possunt adaptari, ut ipsorum anguli æquales ΒΓΔ, ΕΓΗ congruant (*Fig.* 86.). De constructione Euclidea conf. §. 135. sq. In utraque ea parallelogrammorum latera in directum ponuntur, quorum mutuæ rationes dari censentur.

ΕΓΗ latera ΒΓ & ΓΗ, ΔΓ ac ΓΕ, proinde & eorum rationes dentur; vel (quod ſubintelligi cenſendum eſt) ſi lineæ ſaltem dentur rectæ α & β, γ & δ, quarum rationes eædem ſint rationibus laterum ΒΓ & ΓΗ, ΔΓ & ΓΕ; oſtendatur, duas quoque exhiberi poſſe rectas K, M, quarum ratio mutua eadem ſit rationi parallelogrammorum ΑΓ, ΓΖ.

§. 196.

Pariter *Propoſitionis* VIII, 5 (3): Οι επιπεδοι αριθμοι προς αλληλους λογον εχουσι τον συγκειμενον εκ των πλευρων, demonſtratio duos exhiberi poſſe numeros H, K, eosque in eadem ratione minimos, adſtruit, quorum ratio eadem ſit rationi numerorum planorum (*Lib.* VII. *Defin.* 16.) $A = \Gamma \times \Delta$, $B = E \times Z$; ſi rationes laterum $\Gamma : E$, $\Delta : Z$ in numeris minimis dentur.

§. 197.

Rectæ pro lubitu ſumtæ K reſpondens M (§. 195. *Fig.* 85. ſq.) iterata Problematis VI, 12. applicatione ſic inveniri docetur: ut primum rectis, rationem ΒΓ : ΓΗ exhibentibus, & aſſumtæ K, quarta proportionalis Λ; tum rectis rationem ΔΓ : ΓΕ ſiſtentibus, & inventæ Λ, quarta proportionalis M conſtruatur.

Ac *Propoſitioni* VIII, 5. in uſum ejus præmiſſa VIII, 4ta rationibus numericis datis $\Gamma : E$, $\Delta : Z$, tres numeros H, Θ, K invenire deinceps minimos in datis illis rationibus docet.

§. 198.

Identitatis rationum rectarum K : M ac parallelogrammorum ΑΓ : ΓΖ (§. 195. *Fig.* 85. ſq.), numerorumque H : K ac planorum A : B (§. 196.) demonſtrandæ gratia, ibi tertium parallelogrammum ΓΘ, utrique ΑΓ, ΓΖ

(3) Alterius *Elementorum* propoſitionis, ejusque præter VI, 23tiam ſolius, in qua rationis ex aliis compoſitæ mentio ſit. Propoſitionem VI, 23tiæ analogam de parallelepipedis ſupplet *Rob. Simſon* in *Lib.* XI. *Prop.* D. poſt XI, 33tiam (p. 269. ſqq. 402. *Matth.* p. 138. ſq.). Pariter in *Libro* VIII. ſimile theorema de numeris ſolidis (*Lib.* VII. *Defin.* 17.) deſideraveris.

ΓZ reſpective æqualtum, ſub latere ΔΓ prioris, ac ΓH latere poſterioris; hic tertius numerus planus Λ ſub latere Δ prioris A, ac latere E alterius B, conſtruitur.

Tum iterata Propoſitionum VI, 1. VII, 17. V, 11. applicatione infertur eſſe

parallelogr. $\begin{cases} A\Gamma : \Gamma\Theta = K : \Lambda \\ \Gamma\Theta : \Gamma Z = \Lambda : M \end{cases}$; numer. plan. $\begin{cases} A : \Lambda = H : \Theta \\ \Lambda : B = \Theta : K \end{cases}$

Denique hinc, vi Propoſitionis V, 22. & analogæ VII, 14. efficitur

$$A\Gamma : \Gamma Z = K : M \qquad A : B = H : K.$$

§. 199.

Jam vero rationes K : M, H : K, termino artis dici primum ex rationibus $\begin{cases} K : \Lambda & H : \Theta \\ \Lambda : M, & \Theta : K \end{cases}$; tum ex rationibus $\begin{cases} B\Gamma : \Gamma H & \Gamma : E \\ \Delta\Gamma : \Gamma E, & \Delta : Z \end{cases}$, quæ prioribus $\begin{cases} K : \Lambda & H : \Theta \\ \Lambda : M, & \Theta : K \end{cases}$ reſpective eædem ſint (§. 197.), componi adjicitur.

Οι αρα λογοι της τε Κ προς την Α, και της Λ προς την Μ, οι αυτοι εισι τοις λογοις των πλευρων, της τε ΒΓ προς την ΓΗ, και της ΔΓ προς την ΓΕ. Αλλ ο της Κ προς την Μ λογος συγκειται εκ τε τυ της Κ προς την Λ λογυ και τυ της Λ προς την Μ· ωςε και η Κ προς την Μ λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων.

Οι αρα Η, Θ, Κ προς αλληλυς εχυσι τυς των πλευρων λογυς. Αλλ ο τυ Η προς τον Κ λογος συγκειται εκ τε τυ Η προς τον Θ και τυ τυ Θ προς τον Κ· ο Η αρα προς τον Κ λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων (4).

Denique poſt demonſtratam rationum AΓ : ΓZ & K : M, A : B & H : K identitatem (§. 198.) concluditur: *Και* $\begin{cases} το\ A\Gamma \\ ο\ A \end{cases}$ *αρα προς* $\begin{cases} το\ \Gamma Z \\ τον\ B \end{cases}$ *λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων.*

(4) Hæc quidem in quibusdam exemplaribus deſiderari, & commode abeſſe poſſe notat *Dav. Gregorius* (*Ευκλειδυ τα Σωζομενα.* Oxon. 1703. p. 175.). Præmiſſa autem ab auctore fuiſſe arguit ſubſumtio ad calcem demonſtrationis: *Ο δε Η ειπερ τον Κ λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων.*

§. 200.

Prorſus nulla igitur in deductionibus *Propoſitionum* VI, 23. VIII, 5. habetur ratio ejus, quæ in *Elementis* nunc exſtat, iisdemque verbis ab *Eutocio*, ſeculi poſt C. N. ſexti ſcriptore, ex iis recitatur (5), *Lib.* VI. *Definitionis* 5ta: Λογος εκ λογων συγκεισθαι λεγεται, οταν αι των λογων πηλικοτητες εφ' εαυτας πολλαπλασιασθεισαι ποιωσι τινα (6); hoc ipſo jam nomine (7), & laxo, in quod deſinit, effato ſatis ſuſpectæ. Ambiguo

(5) *Commentar.* in locum *Archimedis*, qui §. 202. affertur (p. 160.): Υπομνηστεον δη, πως λεγετο λογος εκ λογων συγκεισθαι. Ως γαρ εν τη Στοιχειωσει, οταν αι των λογων πηλικοτητες εφ εαυτας πολλαπλασιασθεισαι ποιωσιν τινα· πηλικοτητος δηλονοτι λεγομενης του αριθμου, η παρουσιμος εστιν ο διδομενος λογος — Ταυτον δε ειπων και τον αριθμον τον πολλαπλασιαζομενον επι τον επομενον ορον του λογου, και ποιουντος τον ηγουμενον.

(6) Sic editio Oxonienſis *Dav. Gregorii* (p. 113.). Baſileenſis *Hervagii* habet τινας (p. 68.). *Meibomius* (*De proportionibus Dialogus.* Hafn. 1655. p. 78.) monet: nec πηλικοτητας facile ſuppleri; nequaquam certe λογους. Conf. Not. 19.

(7) Vid. *Rob. Simſon* (p. 373. *Matth.* p. 383. ſq.). Idemque ſi non verbis, re tamen ipſa *Clavius* fatetur (p. 536.); & *Saccherius* (*Euclides ab omni naevo vindicatus.* Mediol. 1733. *Lib.* II. *Pars* II. *in qua expenditur quinta Definitio Libri VI.* p. 138. ſq.) ratione nec rei, nec terminis textus Græci congrua (conf. Lib. V. Defin. 15. & Prop. 17. 18. Lib. VII. Defin. 13. 15.) excuſare ſic annititur: „Nolo diſſimulare, quod jam inutilis fieret illa Definitio, ſuper qua diſputamus. Nam reſpondeo: voluiſſe utique Euclidem rationem veluti reddere nominis ab ipſo aſſumti, ita ut nempe ad eum modum una aliqua ratio intelligatur ex pluribus rationibus componi, quo unus quispiam numerus ex pluribus numeris invicem multiplicatis exoriri intelligitur & componi; ſed ea tamen nuspiam violata lege, ut nunquam ad demonſtrandum eam Definitionem adhibeat, niſi antea ita omnes terminos diſpoſuerit, ut locum habere poſſit demonſtratio ex æquo juxta 22dam quinti. Atque ita ſemper faciunt omnes magni geometræ tam veteres quam recentiores — Unde tandem conſtat: illam Defin. 5. ſexti nulli difficultati obnoxiam

biguo & vago τινα *Theon*, ſeculi poſt C. N. quarti ſcriptor, addit πληθικοτητα λογου (8); Σχολιον εις το 5. Αδηλε in parte priori ſubſtituit λογον (9). Plerique Commentatores, *Clavius* ex. gr. (p. 532.) interpretantur; nonnulli etiam, ut *Vitello* (*Opticæ* Lib. I. Baſil. 1572. p. 4.), *Tartalea* (*Euclide.* Venet. 1543. Fol. 78. b.), *Dav. Gregorius* (p. 513.) immediate vertunt: Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum {quantitates / denominatores} inter ſe {multiplicatæ / multiplicati} illius faciunt {quantitatem / denominatorem} (10).

§. 201.

noxiam eſſe; utpote quæ ſolius nominis impoſitionem decernit, nulli poſtea ad demonſtrandum uſui futuram."

(8) *Commentar.* in locum *Ptolemaei*, qui §. 202. citatur (p. 62.): λογος εκ δυο λογων η και πλειονων συγκεισθαι λεγεται, οταν αι των λογων πληθικοτητες πολλαπλασιασθεισαι ποιωσι τινα πληθικοτητα λογου: ubi primum, quod conſtet (alibi quam in textu, quem habemus, *Elementorum*) hæc Definitio traditur; quare & *Theon* ipſam, ſublata genuina, *Elementis* inſeruiſſe ab *Rob. Simſon* (p. 372. ſq. *Matth.* p. 82. ſq. 84.) accuſatur: "Nihil in geometriæ elementis tironibus difficilius intellectu haberi ſolet doctrinâ de rationum compoſitione; quam abſurdam & αγεωμετρικην reddidit *Theon* ſubſtituendo Definitionem 5tam Libri V^i. vice Definitionis bonæ rationis compoſitæ, quam ſine dubio dederat *Eudoxus* vel *Euclides* poſt Definitionem rationis triplicatæ &c. in Libro V, proprio ſcilicet ejus loco — *Theonem* enim in *Elementa* eam induxiſſe vix dubitari poteſt: exſtat enim in *Commentariis* ejus in *Ptolemaei* Μεγαλην Συνταξιν; ubi & [vid. Not. 15.] puerilem tradit ejus explicationem, utpote ſolummodo eis rationibus convenientem, quæ numeris exhiberi poſſunt."

(9) In edit. Elementor. Baſileenſi p. 67: λογος εκ λογων συγκεισθαι λεγεται, οταν πληθικοτητες τινων λογων πολλαπλασιαζομεναι ποιωσι λογον. Εκεινος ο λογος συγκεισθαι εκ των λογων εκεινων λεγεται, ων αι πληθικοτητες ποιουσιν αυτον. Πληθικοτητας δε λεγει, αφ ων ονομαζονται· ως απο τυ δυο, ο διπλασιος.

(10) Ex relatis in Not. 5. 9. liquet: juxta *Eutocium* atque *Auctorem Scholii* πληθικοτητας λογων ſignificare denominatores ſeu exponentes, quos dicimus, rationum. Idemque ſupponi ab *Theone* patebit ex Nota 16.

§. 201.

Contra aperte ea denominationis *rationis compoſitæ* explicatio in demonſtrationibus Propoſitionum VI, 23. VIII, 5. (§. 199.) ſubſumitur, quam ſtrictius *Campanus* in Lib. VII. Defin. 19. ([11]), *Galilei* (*Principio della quinta giornata dettata ad Evang. Torricelli da aggiungerſi all' altre quatro de' Diſcorſi e Dimoſtrazioni matematiche intorno alle due nuove ſcienze, appartenenti alla meccanica ed a' movimenti locali*, in *Elementi piani e ſolidi d'Euclide.* Fiorenze 1769. *Parte* II. p. 138. ſqq.), *Herigonus* (*Curſus math.* Paris. 1644. Tom. I. *Euclidis Elementa.* p. 205.) & *Barrow* (*Euclidis Element. Libri* XV. Cantabrig. 1655. p. 93.) in ſuis Defin. 10. Lib. V. ([12]), *Scarburgh* (*The English Euclide.* Oxford. 1705. Schol. in Defin. 10. Lib. V. & in Defin. 5. vulgarem Lib. VI. p. 194. 240.), *Lorenz* (*Euklids Elemente.* Halle 1781. 1798.) in ea, quam tradit, Defin. 5. Lib. VI, aliique recentiores; uberius *Viviani* (*Scienza uni-*

(11) *Euclidis Element. Libri* XV. Baſil. 1558. p. 169. "*Defin.* 18. Cum fuerint quotlibet numeri continue proportionales; dicetur proportio primi ad tertium ſicut primi ad ſecundum duplicata, ad quartum vero triplicata. *Defin.* 19. Cum continuatæ fuerint eædem vel diverſæ proportiones; dicetur proportio primi ad ultimum ex omnibus compoſita."

Definitionem 5. *Lib.* VI. *Campanus* non habet; quod & *Meibomius* (*Præfat.* p. 6.) ac *Rob. Simſon* (p. 373. *Matth.* p. 84.) notant.

Et in demonſtratione quidem VIII, 5tæ (p. 204.) per Definitionem proportionis compoſitæ concludens *Campanus* ſuam Libr. VII. 19nam innuere videtur: ſed in demonſtratione VI, 23tiæ, apud ipſum 24tæ (p. 158.) ad dicta in fine 11mæ Defin. L. V. (p. 109.) remittit; quæ ad rationis compoſitæ exponentem multiplicatione denominatorum rationum componentium producendum, propius igitur ad 5tam Lib. VI. Defin. (§. 200.) ſpectant.

(12) Quas ambo his enunciant verbis: "Quotlibet magnitudinibus ordine poſitis, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, & ita deinceps, donec extiterit proportio." Uterque tamen deinde etiam vulgarem Lib. VI. Defin. 5. (§. 200.) tradit.

universale delle proporzioni, Defin. 14. 15. in supra nominatis *Elementi piani e solidi d'Euclide.* P. II. p. 11. sqq.), *Rob. Simson* in Defin. A. quam 11ma Lib. V. subnectit (p. 132. sq. *Matth.* p. 40.), & post ipsum *Playfair* in sua Defin. 10. Lib. V. (p. 131.) exponunt; *Simson* quidem his verbis:

1°. "Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis; prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione, quam habet prima ad secundam, & ratione secundæ ad tertiam, & ea, quam habet tertia ad quartam; & ita deinceps usque ad ultimam. Ex. gr. sint magnitudines A, B, C, D: prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compositam ex ratione ipsius A ad B, & ratione B ad C, & ratione C ad D; vel ratio A ad D dicitur composita esse ex rationibus A ad B, B ad C, & C ad D" (13).

2°. "Si igitur ratio A ad B eadem sit rationi E ad F; & ratio B ad C eadem fuerit rationi G ad H; & ratio C ad D eadem rationi K ad L; A ad D habere dicitur rationem compositam ex rationibus, quæ eædem sunt rationibus E ad F, G ad H, & K ad L. Idemque intelligitur, quando brevitatis gratia dicitur A ad D habere rationem compositam ex rationibus E ad F, G ad H, & K ad L."

3°. "Similiter si ratio M ad N eadem sit rationi A ad D; præcedentibus manentibus: brevitatis gratia dicitur ratio M ad N eadem esse rationi compositæ ex rationibus" [vel A ad B, B ad C, & C ad D; vel] "E ad F, G ad H, & K ad L"; imo quod & *Playfair* addit, ipsa ratio M ad N ex rationibus [vel A ad B, B ad C, C ad D; vel] E ad F, G ad H, K ad L componi dicitur.

§. 202.

(13) Huic quoque explicationi, non vulgari Def. 5. Lib. VI. (§. 200.), respondent, quæ in Definitionibus 10. 11. Lib. V. traduntur declarationes denominationum, rationibus ex $A:B$, $B:C$, $C:D$ compositis tum adhiberi solitarum, quando rationes $A:B$, $B:C$, $C:D$ invicem sunt eædem. Conf. *Clavius* p 536. sq.; *Galilei* p. 141. sq.; *Scarburgh* p. 194. 256.; *Simson* p. 373. sq. *Matth.* p. 84. sq.

§. 202.

Eodemque ſenſu ceteri Geometræ veteres Græci denominationem rationis compoſitæ uſurpant ([14]).

Archimedes ex. gr. in *Propos. 5. Lib. II. de ſphæra & cylindro* (Αρχιμηδους τα Σωζομενα, μετα των Ευτοκιου Ασκαλωνιτα Υπομνηματων. Oxon. 1792. p. 158. *Archimeds zwey Bücher über Kugel und Cylinder* — Tübing. 1798. p. 77. *Fig.* 44.) infert: Επει ο της ΡΛ προς ΛΧ λογος συνηπται εκτε τω ον εχει η ΡΛ προς ΛΔ, και η ΔΛ προς ΛΧ· αλλ ως μεν η ΡΛ προς ΛΔ, το απο ΔΒ προς το απο ΔΧ· ως δε η ΔΛ προς ΛΧ, ουτως η ΒΖ προς ΖΧ· ο αρα της ΡΛ προς ΛΧ λογος συνηπται εκτε τω ον εχει το απο ΒΔ προς το απο ΔΧ, και η ΒΖ προς ΖΧ. Πεποιηθω δε ως η ΡΛ προς ΛΧ, η ΒΖ προς ΖΘ — Και ο της ΒΖ αρα λογος προς ΖΘ συνηπται εκ τε τω ον εχει το απο ΒΔ προς το απο ΔΧ, και η ΒΖ προς ΖΧ. Confer. ibidem *Propos. 9.* (Edit. Oxon. p. 187. Tubing. p. 97.).

Plura etiam exempla ſuppeditant Απολλωνιου Περγαιου Κωνικων Βιβλ. δ. τα πρωτερα, μετα Παππου Αλεξανδρεως Λημματων και Ευτοκιου Ασκαλωνιτου Υπομνηματων. Oxon. 1710. Videantur, præter alias, *Lib.* I. *Propos.* 39. 40. p. 68. ſqq. *Lib.* III. *Propos.* 54. 56. p. 211. ſq. 214. ſeqq.

Ptolemæus (Κλ. Πτολεμαιου Μεγαλης Συνταξεως Βιβλ. ιγ. Θεωνος Αλεξανδρεως εις τα αυτα Υπομνηματων Βιβλ. ια. Baſil. 1538. Συνταξεως Βιβλ. α. p. 18.) Propoſitionem: Εις δυο ευθειας τας ΑΒ και ΑΓ (*Fig.* 87.) διαχθεισαι δυο ευθειαι, αι τε ΒΕ και η ΓΔ, τεμνετωσαν αλληλας κατα το Ζ σημειον· λεγω, οτι ο της ΓΑ προς ΑΕ λογος συνηπται εκτε τε της ΓΔ προς ΔΖ, και της ΖΒ προς ΒΕ, ſic adſtruit: Ηχθω γαρ δια τε Ε τη ΓΔ παραλληλος η ΕΗ. Και επει παραλληλοι εισιν αι ΓΔ και ΕΗ, ο της ΓΑ προς ΑΕ λογος ο αυτος εστι τω της ΓΔ προς ΕΗ. Εξωθεν δε η ΖΔ. Ο αρα της ΓΔ προς ΕΗ λογος συγκειμενος εστι εκτε τε της ΓΔ προς ΔΖ και της ΔΖ προς ΗΕ· ωστε και ο της ΓΑ προς ΑΕ λογος συγκειται εκτε τε της ΓΔ προς ΔΖ και της ΔΖ προς ΗΕ. Εστι δε και ο της ΔΖ προς ΗΕ λογος ο αυτος τω της ΖΒ προς ΒΕ, δια το παραλ-

ληλους

(14) Contra Definitionis 5. Lib. VI. §. 200, nullum apud eos veſtigium invenitur. (*Galilei* p. 137. *Viviani* p. 12. *Scarburgh* p. 236. *Simſon* p. 373. *Matth.* p. 83.)

Απλως παλιν ισαι τας ΕΗ και ΖΔ. Ο αρα της ΓΑ προς ΑΕ λογος συγκειται εκ τε της ΓΔ προς ΔΖ, και της ΖΒ προς ΒΕ ([15]).

§. 203.

(15) *Theon* in prolixa hujus loci commentatione (Εις το τε Πτολεμαιε Βιβλ. ου Υπομνημα. p. 61. ſqq.) primum (p. 61.) Propoſitionem *Ptolemaei* accuratius enunciat, demonſtrationemque uberius, ſervata autem ipſius acceptione denominationis rationis compoſitæ (§. 201.), exponit; tum (p. 61. ſq) ulterioris, quod ait, illuſtrationis gratia Propoſitionem 23. Lib. VI. *Element.* adhibet, quæ vero argumentationem complicat potius, quam explicat; denique (p. 62.) ex abrupto, & ſine ulla ad propoſitum applicatione, Definitionem in Not. 8. relatam profert, eique hæc ſubjicit:

Εχετω γαρ το ΑΒ προς το ΓΔ (*Fig.* 88.) λογον δεδομενον, και το ΓΔ προς το ΕΖ λογον· λεγω, οτι ο τε ΑΒ προς ΕΖ λογος συγκειται εκ τε τε τε ΑΒ προς ΓΔ, και τε ΓΔ προς ΕΖ, τετεστιν, οτι εαν η τε ΑΒ προς το ΓΔ λογε πηλικοτης πολλαπλασιασθη επι την τε ΓΔ προς ΕΖ τε λογε πηλικοτητα, την τε ΑΒ προς ΕΖ ποιησει.

Εστω γαρ πρωτερον το μεν ΑΒ τε ΓΔ μειζων, το δε ΓΔ τε ΕΖ· και εστω το μεν ΑΒ τε ΓΔ διπλασιον, το δε ΓΔ τε ΕΖ τριπλασιον. Επει γε το μεν ΓΔ τε ΕΖ τριπλασιον εστι, το δε ΓΔ διπλασιον το ΑΒ· το αρα ΑΒ τε ΕΖ εστιν εξαπλασιον, ειπερ και εαν το τριπλασιον τινος διαπλασιασωμεν, γινεται αυτε εξαπλασιον. Τετο γαρ εστι φυσεως συνθεσις. Η ιτως. Επει το ΑΒ τε ΓΔ εστι διπλασιον, διηρηθω το ΑΒ εις τα τε ΓΔ ισα τα ΑΗ, ΗΒ. Και επει το ΓΔ τε ΕΖ εστι τριπλασιον, ισον δε το ΑΗ τω ΓΔ· και το ΑΗ αρα τε ΕΖ τριπλασιον εστι. Δια τα αυτα δη και το ΗΒ τε ΕΖ εστι τριπλασιον· και ολον αρα το ΑΒ τε ΕΖ εστιν εξαπλασιον. Ο αρα τε ΑΒ προς το ΕΖ λογος συγκειται δια τε ΓΔ μεσε ορε εκτε τε τε ΑΒ προς το ΓΔ λογε, και τε τε ΓΔ προς ΕΖ.

Similiter, quando ΓΔ utraque ΑΒ, ΕΖ ſit $\left\{\begin{matrix}\text{minor}\\\text{major}\end{matrix}\right\}$: exponentium $\left\{\begin{matrix}3, \frac{1}{2}\\\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\end{matrix}\right\}$, quos ſumit, rationum ΑΒ : ΓΔ, & ΓΔ : ΕΖ multiplicatione denominatorem $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}\end{matrix}\right\}$ rationis ΑΒ : ΕΖ produci; hanc igitur juxta ſuam Definitionem ex illis componi, *Theon* infert; additque: Ομως δε και επι των λοιπων πτωσεων. Conf. *Clavius* p. 533. ſq.

Theonis illa definitio & argumentatio alteram quoque conſtituunt par-

§. 205.

Quando numeris exprimuntur rationes datæ, ex quibus alia haud imme-

Commentarium ſuum ſcripſit, notam ac familiarem ſuppoſuiſſe; nec niſi ſibi agendum putaſſe, ut eam cum *Ptolemaei* argumentatione: Ἐξωθεν δε η ΖΔ. Ὁ αρα της ΓΔ προς ΕΗ λογος συγκειμενος ἐσται ἐκτε τυ της ΓΔ προς ΔΖ και τυ της ΔΖ προς ΗΕ, conciliaret.

Eodem modo pronunciata: rationem componi, ſumto inter ipſius terminos aliquo medio, aliquibusve mediis; & cum exponens ejus multiplicatione exponentium aliarum rationum producatur (Not. 5.), ad ſe mutuo refert *Eutocius* in iis, quæ prolixius in locum *Archimedis* §. 202. relatum (p. 160. ſqq.), ſtrictius in Propoſitionem 11. Lib. I. *Conicor. Apollonii*, occaſione ſumta ab VI, 23tiæ *Elem.* in demonſtratione ejus applicatione, p. 32. ſq. commentatur; cum *Theone* in cæteris etiam conſentiens, nec niſi ejus argumentationem per exempla reprehendens. Ipſe vero, poſitis $\left\{\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}\right\}$ exponentibus rationum $\left\{\begin{matrix} A:C \\ C:B \end{matrix}\right\}$, ita ut ſint $A = D \times C$, $C = E \times B$, & factis $D \times E = F$, ac $F \times B = H$; A eſſe $= H = F \times B$, igitur $F = D \times E$ denominatorem eſſe rationis $A : B$, proinde hanc juxta Defin. §. 200. ex rationibus $A : C$, $C : B$ eſſe compoſitam, priori loco ſic infert:

$$F : E = F \times B : E \times B = H : C$$
$$\& \quad E : C = D \times E : D \times C = F : A$$
unde alterne $\quad E : F = C : A$
& inverſe $\quad F : E = A : C$
Ergo $\quad H : C = A : C$; & hinc $H = A$.

Altero autem loco ſic: $E : C = D \times E : D \times C = F : A$
$$\& \quad E : F = E \times B : F \times B = C : H$$
Ideoque alterne $\quad E : C = F : H$
Proinde $\quad F : A = F : H$; & hinc $A = H$.

Sed cum, ob E, F numeros, niſi A, C, H pariter numeri ſint, per communem rationis notionem & *Elem.* V. Defin. 4. intelligi non poſſit eſſe $E : C = F : A = F : H$; proportiones ab *Eutocio* adhibitæ, ut (quod poſteriori

immediate cognita componitur ſeu infertur; hæc eadem eſt rationi, quam

---

riori loco p. 33. contendit) de magnitudinibus univerſim demonſtratio ipſius valeat, efficere nequeunt. Potiorque hoc reſpectu eſt *Theonis* argumentatio (Not. 15.): quippe ad magnitudines quascunque A, C, B patens; nec ad numeros, exempli inſtar pro denominatoribus rationum ab eo ſumtos, reſtricta (§. 204.).

Vitello (loc. §. 200. cit. p. 7. ſq.) poſitis $\left\{\begin{matrix}D\\E\\F\end{matrix}\right\}$ rationum $\left\{\begin{matrix}A:C\\C:B\\A:B\end{matrix}\right\}$ denominatoribus, quos, pariter ac magnitudines A, C, B, per lineas rectas deſignat, ex eo, quod ſic tam $D\times C$ quam $F\times B$ ipſi A, proinde inter ſe æquentur, per VI, 16. *Elem.* infert eſſe $F:D=C:B$; ideoque $F=E\times D$, pariter ac (ſupp.) $C=E\times B$; rationem igitur $A:B$ ex rationibus $A:C$, $C:B$ juxta Defin. §. 200. componi.

Demonſtrationes Euclideas Lib. V. *Elem.* deſignandis per lineas rectas magnitudinibus A, B, C &c. ſuam imitari *Vitello* quidem ſibi perſuaſiſſe videtur; ſed argumentatio ex VI, 16. eam ad ipſas lineas rectas reſtringit. Tum lineam fieri ex ductu lineæ in lineam, ſeu denominatores rationum lineæ ad lineam eſſe lineas, Euclideis communibusque notionibus repugnat. Numeros autem denotare ſumtis D, E, F: tam eſſe $F\times B=A$, quam $D\times C=A$, igitur $F\times B=D\times C$, intelligitur quidem, quascunque magnitudines homogeneas deſignent A, C, B; & hinc eſſe $F:D=C:B$ conſequitur juxta Not. 18. nro. II.; unde per V, 4. infertur eſſe $F:E\times D=C:E\times B$; ideoque $F=E\times D$, ob $C=E\times B$ (ſupp.); verum ſic *Vitellonis* argumentatio plus non conficit quam *Theonis*.

Quare, cum hinc genuinam eſſe cenſeret Definitionem §. 200, inde *Theonis*, *Eutocii* ac *Vitellonis* demonſtrationes ipſi haud ſatisfacerent; *Savilius* (*Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis.* Oxon. 1621. Lect. VII. p. 140.) profeſſus eſt: "In pulcherrimo geometriæ corpore duo ſunt nævi, duæ labes, nec, quod ſciam, plures, in quibus eluendis & emaculandis cum veterum, tum recentiorum vigilavit induſtria. Prior eſt Poſtulatum 5." [ſeu Ax. 11. Lib. I.]. "Poſterior pertinet ad compoſitio-

quam productum multiplicationis terminorum antecedentium rationum data-

fitionem rationum: rationem ſcilicet A ad B componi ex ratione A ad quodcunque extrinſecus ſumtum, v. gr. C, & illius extrinſecus ſumti ad B."

Et *Gregorius a S. Vincentio* (*Opus geometricum quadraturae circuli & ſectionum coni.* Antverp. 1647. Lib. VIII. p. 872.), eadem admiſſa Definitione, ut *Principium* ſe ſumere declaravit: "Datis tribus vel pluribus quantitatibus, ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus mediarum; ſive prima quantitas habet ad ultimam rationem, quæ oritur denominatoribus mediarum rationum inter ſe multiplicatis;" adjungens: "Quod principium etſi veriſſimum ſit, & a magnis geometris non ſemel uſurpatum, non tamen usque adeo omnibus arridet, ut ejus demonſtrationem non requirant. Ego vero cenſeo cum omnibus geometris tamdiu inter principia eſſe cenſendum, donec alicui ratio occurrat hoc ipſum geometrica demonſtratione inter theoremata reducendi."

Talem (ceterum fere totam ex ipſa Libri VIII. *Gregorii a S. Vincentio* de Proportionalitate, quam vocat, doctrina deſumtam) traditurus *Tacquet* (*Elementa geometriae planae ac ſolidae* — Amſtelod. 1683. primum Antverp. 1654. Lib. V. Pars III. p. 166. ſqq.) primum quidem (p. 167. ſq.) rationis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poſſe denominatorem fatetur. At ſi duæ fuerint pluresve, alio quodam ſenſu earum poſſe denominatores exhiberi contendit: ipſis nempe ad rationes commune conſequens habentes reductis, commune hoc conſequens explere locum unitatis, & antecedentia eſſe denominatores rationum, oſtendentes, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Tum magnitudinem dici per magnitudinem multiplicari cum analogia quadam ad numeros (p. 174.) monet: quando, ut quæpiam pro unitate aſſumta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiat ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Datis igitur rationibus $A:B$, $B:C$; & facto $B:C=X:B$: denominatores illarum eſſe A, X; B vero explere munus unitatis: ideoque, rurſus facto $B:X=A:Z$, productum multiplicationis A per X eſſe Z; rationemque $Z:B$ eam eſſe aſſerit, quæ ex multiplicatione rationum $A:B$ & $X:B$ ſeu $B:C$ producatur. Sed, ob $Z:A=X:B=B:C$, alter-

datarum habet ad productum ex ipsarum terminis consequentibus: quo theo-

alterne esse $Z:B=A:C$; ergo & rationem $A:C$ ex multiplicatione rationum $A:B$, $B:C$ produci, seu ex rationibus $A:B$, $B:C$ componi, p. 175. sqq concludit: rationem enim, quæ ex plurium rationum multiplicatione producatur, eam esse, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habeat ad unitatem seu consequens commune; pariterque (per Defin. §. 200.) rationem, quæ ex pluribus rationibus componitur, eam esse, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habeat ad unitatem seu consequens commune (p. 170. 173.). Conf. *Gregor. a S. Vincent.* p. 868. sqq. 877. 882. 908.

Præter significatus vero haud proprios, vocibus: *denominator rationis*, *multiplicare*, tributos; alio etiam sensu, quam *Theon* & *Eutocius*, lectionem λογον (Not. 9) supponente, Definitionem §. 200. *Tacquet* accipit. Quibus concessis; rationem $Z:B$, ideoque etiam $A:C$, ex rationibus $A:B$, $B:C$ juxta Defin. §. 200. componi, missa rationum multiplicatione ambigua (*Barrow Lectiones habitæ in scholis publicis Acad Cantabrig. anno* 1666. Lond. 1684. Lect. V. p. 253. sqq. *Hindenburg* in *Lempii Erläuterungen der Käſtneriſchen Anfangsgr. der Arithm. Geom. u. Trigon.* p. 308. sqq. & Præfat. fol. b. 2. sqq.), poterat inferre.

In *Euclidis Elementor. geometricor. Lib. XIII. ex traditione Naſiridini Tuſini* (seculo decimo tertio *Vitelloni* fere coævi), Arabice impressis Romæ 1594. juxta versionem Definitionum Lib. VI. a Dno *Hauber*, Prof. Denkendorfensi, mecum communicatam, compositio rationis e duabus rationibus homogeneis jam quoque dicitur effectio rationis, cujus quantitas (denominator) sit ad quantitatem unius duarum, ut quantitas alterius ad unitatem; rationis quantitas (denominator) ad magnitudinem ipsi homogeneam pro unitate sumtam statuitur esse, ut rationis terminus antecedens ad consequentem (quod, proprio denominatoris significatu sumto recidit in multiplicationis magnitudinum explicationem ex *Tacqueti* scholio p. 174. relatam); & his conformiter rationem $A:C$ ex rationibus $A:B$, $B:C$ componi sic ostenditur: Sit ut A ad B, ita D ad unitatem ex magnitudinibus ejusdem

gene-

theoremate praxis etiam regulæ trium, quam vocant, compoſitæ nititur.

Quippe ſi $A:B = 3:2 = m:n$
$B:C = 1:4 = p:q$
$C:D = 9:11 = r:s$
$D:E = 23:7 = t:v$
&c.

deno-

---

generis aſſumtam; & ut B ad C, ita E ad unitatem; & fiat F ad E, ut D ad unitatem. Erit (V, 11.) ut A ad B, ut F ad E. Sed eſt B ad C, ut E ad unitatem. Igitur ex æquo ordinate (V, 22.) A ad C, ut F ad unitatem. Quare F denominator eſt rationis $A:C$. Cum & D, E ſint rationum $A:B$, $B:C$ denominatores; ac F ad E ſit uti D ad unitatem: componitur itaque ratio $A:C$ ex rationibus $A:B$ & $B:C$.

Utraque porro demonſtratio (*Naſiridini* & *Tacqueti*) contra methodi accuratæ leges (*Rob. Simſon* p. 365. *Matth.* p. 63.) ſupponit, quam invenire prius haud docuit, duabus propoſitis magnitudinibus quibuscunque tertiam; tribus, quartam proportionalem. Quarum ſymbolica, ad analogiam numerorum, repræſentatione ſi acquieſcatur; deductiones illæ ad eam redeunt, qua *Barrow* in nota ad Defin. 5. Lib. VI. & *Wallis* (*Opp. math.* Pars I. Oxon. 1657. *Matheſis univerſalis*, Cap. 30. p. 261. *Adverſus Meibomii de proportionibus dialogum Tractatus.* p. 26. ſq.) utuntur: "Ratio $A:C$ componitur ex rationibus $A:B$ & $B:C$; nam $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$". Conf. Not. 19.

Wallis quidem (*Adv. Meibom. Tract.* p. 27.) hoc æque de rationibus numeris ineffabilibus valere contendit. Verius autem *Barrow* alia occaſione in *Lectionibus* ſupra nominatis p. 332. profitetur: "Quando rationum termini ſunt aſymmetri: conſequentes in antecedentibus non continentur aliquoties; adeoque peragi nequeunt accuratæ diviſiones, nec ulli diſtincte comprehenſibiles quoti exhiberi. Quoti verò ſub confuſione quadam imaginarii quando vel quomodo ſibimet æquentur, haud ita fuerit in promtu diſcernere, vel ἀποδικτικῶς oſtendere." Conf. ibid. p. 261. ſq.

denotantibus m, n, p, q, r, s, t, v numeros datos, eosque integros (quia rationes numero integro & fracto, vel duobus fractis expressæ facile per V, 15. ad æquipollentes numeris integris expressas reducuntur):

ob
$$2A = 3B \quad nA = mB \text{ (18 no. I.)}$$
$$4B = C \quad qB = pC$$
$$11C = 9D \quad sC = rD$$
$$7D = 23E \quad vD = tE$$
&c.

ideo-

---

(18) Ratio mutua duarum magnitudinum æqualium A, B æqualis est rationi mutuæ duarum quarumcunque aliarum æqualium C, D. Etenim ob $A=B$, $C=D$ (supp.), est tam $mA \overset{\text{Ax.II}}{=} nB$, quam $mC \overset{\text{Ax.II}}{=} nD$, pro eo ac $m \overset{\text{Ax.II}}{=} n$ (Lib. I. Ax. 2. & V, 1. Coroll).

Quare $B:B=1:1$

& hinc (V,18.) $2B:B=2:1$

$3B:B=3:1$

&c,

$(r+1)B:B=r+1:1$, si $rB:B=r:1$ pro numero quocunque integro.

Igitur $mB:B=m:1$

& (V,4. Cor.) $B:nB=1:n$ } pro numeris quibuscunque integris m, n;

(V, 22.) $mB:nB=m:n$

h. e. multipla ejusdem magnitudinis B sunt ut numeri, juxta quos ea metiuntur magnitudinem B.

Quare I°. si $A:B=m:n$

ob $\overline{nA:nB=A:B}$ (V, 15.)

& $mB:nB=m:n$ (demonstr.)

est $\overline{nA:nB=mB:nB}$ (V, 11.)

ideoque $nA=mB$ (V, 9.)

II°. Vicissim si $nA=mB$

ideoque $nA:nB=mB:nB$ (V, 7.)

ob $\overline{nA:nB=A:B}$ (V, 13.)

& $mB:nB=m:n$ (dem.)

est $\overline{A:B=m:n}$ (V, 11.)

ideoque $A = \frac{3}{2}B$ $\quad A = \frac{m}{n}B$

$B = \frac{1}{4}C$ $\quad B = \frac{p}{q}C$

$C = \frac{9}{11}D$ $\quad C = \frac{r}{s}D$

$D = \frac{23}{7}E$ $\quad D = \frac{t}{v}E$

&c.

fit (§. 204.) $A = \frac{3}{2}\times\frac{1}{4}C = \frac{3}{8}C$ $\quad A = \frac{m}{n}\times\frac{p}{q}C = \frac{mp}{nq}C$

$= \frac{3}{8}\times\frac{9}{11}D = \frac{27}{88}D$ $\quad = \frac{mp}{nq}\times\frac{r}{s}D = \frac{mpr}{nqs}D$

$= \frac{27}{88}\times\frac{23}{7}E = \frac{621}{616}E$ $\quad = \frac{mpr}{nqs}\times\frac{t}{v}E = \frac{mprt}{nqsv}E$

&c.

proinde $8A = 3C$ $\quad nqA = mpC$

$88A = 27D$ $\quad nqsA = mprD$

$616A = 621E$ $\quad nqsvA = mprtE$

&c.

& hinc $A : C = 3 : 8$ $\quad = mp : nq$ (18 no. II.)

$A : D = 27 : 88$ $\quad = mpr : nqs$

$A : E = 621 : 616$ $\quad = mprt : nqsv$

&c.

§. 206.

Vel ob $A : B = 3 : 2$ $\quad = m : n$

$B : C = \begin{cases} 1 : 4 \\ 2 : 8 \end{cases}$ $\quad = \begin{cases} p : q \\ n : \frac{nq}{p} \end{cases}$ (VII, 19. Cor. & V, 11.)

---

eſt (V, 22.) $A : C = 3 : 8$ $\quad = \begin{cases} m : \frac{nq}{p} \\ mp : nq \end{cases}$ (V, 15. 11.)

Tum ob $C : D = \begin{cases} 9 : 11 \\ 8 : \frac{8\times 11}{9} \end{cases}$ $\quad = \begin{cases} r : s \\ nq : \frac{nqs}{r} \end{cases}$ (VII, 19. Cor. & V, 11.)

---

eſt (V, 22.) $A : D = \begin{cases} 3 : \frac{8\times 11}{9} \\ 27 : 88 \end{cases}$ $\quad = \begin{cases} mp : \frac{nqs}{r} \\ mpr : nqs \end{cases}$ (V, 15. 11.)

Porro

Porro ob $D:E=\begin{cases}23:7\\88:\frac{88\times7}{23}\end{cases}=\begin{cases}t:v\\nqs:\frac{nqsv}{t}\end{cases}$ (VII, 19. Cor. & V, 11.)

fit (V, 22.) $A:E=\begin{cases}27:\frac{88\times7}{23}\\621:616\end{cases}=\begin{cases}mpr:\frac{nqsv}{t}\\mprt:nqsv\end{cases}$ (V, 15. 11.)

§. 207.

Vel ob $A:B=3:2=\begin{cases}m:n\\p\times m:p\times n\\m\times p:n\times p\end{cases}$ (V, 15.) (VII, 16.)

& $B:C=\begin{cases}1:4\\2:8\end{cases}=\begin{cases}p:q\\n\times p:n\times q\end{cases}$ (V, 15.)

est (V, 22.) $A:C=3:8=mp:nq$

Tum ob $A:C=\begin{cases}9\times3:9\times8\\27:72\end{cases}=\begin{cases}r\times mp:r\times nq\\mp\times r:nq\times r\end{cases}$ (V, 15.) (VII, 16.)

& $C:D=\begin{cases}9:11\\8\times9:8\times11\\72:88\end{cases}=\begin{cases}r:s\\nq\times r:nq\times s\end{cases}$ (V, 15.)

fit (V, 22.) $A:D=27:88=mpr:nqs$

Itaque etiam $A:D=\begin{cases}23\times27:23\times88\\621:2024\end{cases}=\begin{cases}t\times mpr:t\times nqs\\mpr\times t:nqs\times t\end{cases}$ (V, 15.) (VII, 16.)

Unde ob $D:E=\begin{cases}23:7\\88\times23:88\times7\\2024:616\end{cases}=\begin{cases}t:v\\nqs\times t:nqs\times v\end{cases}$ (V, 15.)

fit (V, 22.) $A:E=621:616=mprt:nqsv$ (19).

&c.

(19) *Orontius Finaeus* (*In sex priores Libros geometricor. Element. Euclidis Demonstrationes.* Paris. 1544. primum 1536.) postquam Definitionem 5. Lib. VI. (§. 200.) ad rationes numeris datis expressarum quantitatum seu denominatorum eo, quo *Theon* (not. 15.), modo p. 120. sqq. applicuit: "Est

§. 208.

Strictiori §. 201. n°. 1. expoſito ſenſu Propoſitio V, 22. ſic poteſt enunciari: Rationes, quæ ex rationibus reſpective iisdem inter ſe com-

---

"Eſt & alius", inquit p. 122. ſq. "rationalium quantitatum multiplicandi modus, ipſis potiſſimum numeris, ad numerumve relatis quantitatibus, peculiaris — Nam ex numerorum ſub datis rationibus conſtitutorum multiplicatione numeri procreantur, ſub compoſita vel inde conſtante ratione ſe habentes. Multiplicandi ſunt itaque primum antecedentes numeri ad invicem; & antecedens ipſius compoſitæ rationis efficietur: deinde conſequentes itidem inter ſeſe ducendi, ut conſequens ejusdem rationis generetur." Quod pariter tantum exemplis quibusdam *Orontius* illuſtrat; *Clavius* in *Appendice Libri IX. Element.* (T. II. p. 198. ſq.) eo fere modo, qui §. 207. traditur, demonſtrat.

Hoc etiam modo, alterove præcedentium, tum vero etiam exceptionibus Notæ 17. obnoxio, converſa Propoſitionis §. 205. Definitioni 5. Lib. VI. (§. 200.) fuit accommodata.

Sic *Wallis* (*Adv. Meibom.* p. 25. ſqq.) de lectionibus τινα & τινας Defin. Illius (§ 200. & Not. b.) pronunciavit: "Mihi quidem (utut τινά potiorem lectionem putem, quam & ſecutos video interpretes) perinde fere videtur, utrumvis dicatur. Si legatur τινας: interpretandæ erunt πηλικοτητες ipſæ quantitates comparatæ, ſive rationum termini" [illæ autem in Elementis vocantur μεγεθη; hi alibi ορους: vid. §. 132. & *Meibom. Dial.* p. 95.] qui propterea erunt invicem ducendi, ut faciant τινας (πηλικοτητας), terminos alios — Puta ſi componendæ rationes ſint $a : b$ & $\alpha : \beta$: erit $a \times \alpha$ compoſitæ antecedens; & $b \times \beta$ compoſitæ conſequens; ipſaque propterea ratio compoſita $a \times \alpha : b \times \beta$. Sin legatur τινα (quod potius crediderim); per rationis πηλικοτητα intelligendum erit, quod ex antecedentis ad conſequentem applicatione emergit, puta quotiens aut fractio. Adeoque rationis $a : b$ quantitas erit $\frac{a}{b}$; & rationis $\alpha : \beta$ quantitas $\frac{\alpha}{\beta}$: quæ λογων πηλικοτητες invicem ductæ ποιουσι τινα (πηλικοτητα λογου;

componuntur, eædem ſunt inter ſe. (*Rob. Simſon Elem. Lib. V. Propos. F.* p. 169. *Matth.* p. 72.)

§. 209.

λογε; id enim ſupplendum malim quam λογων), efficiunt, inquam, compoſitæ rationis quantitatem (vel, ſi libet, compoſitam rationem) $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$." Conf. ejusdem *Matheſis univerſalis.* p. 261. ſq.

Jac. Bernoulli Poſitiones inter *mathematicas de rationibus & proportionibus* (Baſil. 1688. *Opp.* Tom. I. Genev. 1744. p. 361. ſqq.) has propoſuit 36tam & ſeq. (p. 370.): "Si quotcunque rationes proponantur; productum omnium antecedentium ad productum omnium conſequentium habere dicitur rationem compoſitam ex rationibus propoſitis. Hinc, datis quotcunque magnitudinibus, ratio primæ ad ultimam compoſita cenſetur ex ratione primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ſic porro usque ad ultimam."

Definitionem 5. Lib. VI. juxta interpretationem *Walliſianam* lectionis τινας & Poſit. 36. *Bernoullii* informatam tradunt *Reyhers in Teutſcher Sprache vorgeſtellter Euclides* (Kiel 1699. p. 303.), & *Koenig* (*Elem. de geometrie, contenant les ſix prem. Livres d'Euclide.* Haye 1758. p. 224 244.). Poſterior in *Appendice Lib. V*, præmiſſis (p 219. 222) Definitionibus: Multiplier dans un ſens general n'eſt autre choſe que trouver une grandeur, qui ſoit à une grandeur homogene dans la raiſon donnée d'une autre grandeur quelconque à une unité homogene; les produits, qui reſultent de la multiplication de deux grandeurs par un meme facteur ſeront nommés des Equiproduits; & huic addita obſervatione: Il ne faut pas confondre les equimultiples avec les equiproduits —; Propoſitionem 1: Les equiproduits mA & mB ſont comme les facteurs A & B, inde infert; quod, ob $\left\{\begin{matrix} mA : A \\ mB : B \end{matrix}\right\} = m : 1$ (Defin.), ſit $mA : A = mB : B$ (V, 11.), ideoque $mA : mB = A : B$. Tum rationem $A:C$ ex rationibus $A:B$, $B:C$ componi Propoſitione 5. (p. 225.) ſic concludit: Compoſant la raiſon $A:B$ avec la raiſon $B:C$, il en reſulte la raiſon $AB:CB$ (Defin.). Mais les termes AB, CB ſont des equiproduits des facteurs A & C (Defin.). Partant $A:C = AB:BC$ (Prop. 1.). Conf. Not. 23.

§. 209.

Pariter ſi duæ pluresve rationes eædem ſunt totidem aliis; terminisque ſingularum ac magnitudini datæ vel aſſumtæ quarta proportionalis inveniri poteſt (20): latiori etiam ſenſu §. 201. n°. 2. ſq. eædem inter ſe erunt rationes, quarum una ex prioribus, altera ex poſterioribus componitur.

Quodſi enim $A:B = E:F$
$C:D = G:H$:
factis $A:B = K:L$ & $E:F = N:O$
$C:D = L:M$ $G:H = O:P$;
etiam ſunt (V, 11.) $K:L = N:O$
$L:M = O:P$
igitur (V, 22.) $K:M = N:P$
h. e. juxta §. 201. n°. 2. ratio ex rationibus $A:B$, $C:D$ compoſita eadem eſt rationi compoſitæ ex rationibus $E:F$, $G:H$ (21).

Eodemque modo aſſertum de pluribus quam duabus rationibus, compoſitioneque rationum juxta §. 201. n°. 3. accepta, demonſtratur. (*Rob. Simſon* l. c. *Propos.* G. p. 169. ſq. *Matth.* p. 73.).

§. 210.

Eædem porro inter ſe ſunt rationes, quarum utraque ſenſu §. 201. n°. 2. ex iisdem rationibus componitur.

Hoc quippe ſenſu ſi tam ratio $A:B$, quam altera $C:D$, ex rationibus $E:F$, $G:H$ componitur; ſintque $E:F = K:L$
$G:H = L:M$:
erit

(20) Eadem determinatio propoſitionibus analogis ſequentibus eſt applicanda. Conf. Not. 25.

(21) Rationem ex duabus pluribusve ſenſu §. 201. nr. 2. 3. compoſitam, ubi e re erit, compendii cauſa deſignabimus, has ſerie verticali ſcriptas uncis includendo. Sic propoſitum §. 209. exprimetur modo ſequenti:

$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$, ſi $\begin{matrix} A:B = E:F \\ C:D = G:H. \end{matrix}$

erit tam $A:B$ quam $C:D$ $\Big\}$ $= K:M$ (§. 201. n°. 2.); igitur $A:B = C:D$ (V, 11.) ([22]).

§. 211.

Sic propositum §. 205. de duabus primum, tum de pluribus rationibus per VIII, 5. (§. 196.) ([23]) obtinetur.

Positis enim $A : B = m : n$
$B : C = p : q$:
utraque ratio $A:C$, & $m \times p : n \times q$ componitur ex rationibus $m:n$ ac $p:q$; illa juxta §. 201 n°. 2; hæc juxta VIII, 5. pariterque sensu §. 201. n°. 2. (§. 196. sqq):
quare est $A : C = m \times p : n \times q$ (§. 210.).
Et si rursus $C : D = r : s$:
pariter utraque ratio $A:D$, & $mp \times r : nq \times s$ componitur ex rationibus $mp:nq$ ac $r:s$ (§. 201. n°. 2. & VIII, 5.).
Unde $A : D = m \times p \times r : n \times q \times s$
&c.

§. 212.

Rationem, quæ ex duabus datis rationibus, per lineas rectas numerosve expressis, componitur, dari, h. e. (*Euclid. Dator. Defin.* 2.) ipsi æqualem lineis rectis numerisve exhiberi posse, efficiunt demonstrationes Propositionum VI, 23. VIII, 5. (§. 195. sqq.) ([24])

§. 213.

---

(22) Seu $A:B = C:D$, si tam $A:B = \left(\begin{matrix}E:F\\G:H\end{matrix}\right)$, quam $C:D = \left(\begin{matrix}E:F\\G:H\end{matrix}\right)$.

(23) Assumta Definitionis 5. Lib. V. (§. 200.) interpretatione in Not. 19. commemorata, identica foret Propositio VIII, 5.; per ambages igitur prorsus incongruas in *Elementis* demonstraretur. Posterius perstaret, admissa Definitionis illius interpretatione in Not. 17. exposita; a qua facillimus est ad priorem transitus (*Wallis* loco in Not. 19. cit.). Conf. *Rob. Simson* p. 374 *Matth.* p. 85.

(24) Idem similiter ad plures, quam duas, rationes sic datas, ex iisque compositas extenditur. Conf. §. 203. sqq.

§. 213.

Eædem conſequentiæ, invertendo ſolum rationes poſteriores ipſique æquales (V, 4. Coroll.), nectuntur, ſi §. 195. *Fig.* 85. ſq. rationes $B\Gamma : \Gamma H$, $E\Gamma : \Gamma\Delta$, & §. 196. rationes $\Gamma : E$, $Z : \Delta$, dari ſupponuntur.

Atque ita, ob parallelogr. $\begin{cases} A\Gamma : \Gamma\Theta = B\Gamma : \Gamma H \\ Z\Gamma : \Gamma\Theta = E\Gamma : \Gamma\Delta \end{cases}$ (VI, 1.), & numeros planos (§. 196. 198.) $\begin{cases} A : \Lambda = \Gamma : E \\ B : \Lambda = Z : \Delta \end{cases}$ (VII, 17. 18.) conſequitur (§. 195. ſqq.): dari rationem mutuam $\begin{cases} \text{parallelogrammor. } A\Gamma : \Gamma Z \\ \text{numeror. planor. } A : B \end{cases}$, ſi utriusque ratio ad $\begin{cases} \text{idem parallelogrammum } \Gamma\Theta \\ \text{eundem numerum planum } \Lambda \end{cases}$ detur.

§. 214.

Hacque ipſa methodo *Euclides*, præmiſſis Propoſitionibus (*Dator.* 1. 2.): Duarum magnitudinum homogenearum datarum dari rationem mutuam; & viciſſim dari magnitudinem, cujus ad datam magnitudinem ratio detur (25); generatim duas magnitudines, quarum rationes ad eandem tertiam dentur, pariter mutuo habere datam rationem in *Dator. Propos.* 8. (26), (apud *Rob. Simſon* & *Schwab* Prop. 9.) demonſtrat.

Denotantibus enim A, C magnitudines, quæ ad eandem B datas habeant rationes; & aſſumta quacunque magnitudine D: primum datæ rationi $A : B$ æqualem fieri jubet $D : E$; cujus terminum conſequentem E dari infert ex *Dat.* 2. Tum datæ rationi $B : C$ jubet inveniri æqualem $E : F$ (ſeu, immediate datæ $C : B$ æqualem $F : E$): ac rurſus F dari per *Dat.* 2; ideoque rationem $D : F$ dari per *Dat.* 1; huic

(25) Si nempe, quod *Rob. Simſon* addit, duabus magnitudinibus, quibus hæc ratio exprimitur, & magnitudini datæ, quarta proportionalis poſſit inveniri.

(26) Τα προς αυτο λογον εχοντα δεδομενον και προς αλληλα λογον εξει δεδομενον.

huic vero, ob $\begin{matrix} A:B=D:E \\ B:C=E:F \end{matrix}$ (conſtr.), eandem eſſe rationem $A:C$ per V, 22. concludit.

§. 215.

Quo nixus principio *Euclides* deinde ſuam *Datorum* tractationem absque rationum compoſitione inſtruit; nominatim Propoſitionis 70. partem priorem (apud *Rob. Simſon* & *Schwab* Prop. 67.), *Element.* VI, 23tiæ reſpondentem: Εαν δυοιν παραλληλογραμμων περι ισας γωνιας — αι πλευραι προς αλληλας λογον εχωσι δεδομενον, και αυτα τα παραλληλογραμμα προς αλληλα λογον εξει δεδομενον, ſic adſtruit ([27]):

Ad latus BC unius parallelogrammi AC (*Fig.* 89.), ſub angulo CBG deinceps poſito angulo $ABC = E$, applicato parallelogrammo $BH =$ alteri DF (I, 44.); eſt parallelogr. $AC:DF = AC:BH$ (V, 7.) $= AB:BG$ (VI, 1.).

Atqui ob ang. $G = ABC$ (I, 29.) $= E$ (ſupp.), & parallelogrammum $BH = DF$ (conſtr.), eſt $BG:DE = EF:\begin{cases} GH & \text{(VI, 14.)} \\ BC & \text{(I, 34.)} \end{cases}$.

Quare cum (ſupp.) detur ratio $EF:BC$, datur ratio $BG:DE$.

Per ſupp. vero etiam datur ratio $AB:DE$.

Proinde datur ratio $AB:BG$ (§. 214. ſeu *Dat.* 8.); ipſique æqualis $AC:DF$.

§. 216.

Quatenus ab modo, rationem, ex laterum BΓ & ΓH, ΔΓ ac ΓE (*Fig.* 85. ſq.) rationibus compoſitam, lineis rectis numerisve datis exhibendi, abſtrahitur; demonſtratio VI, 23tiæ, præeunte *Candalla* (p. 129.), eo redigi poteſt, ut obſervetur: rationem parallelogrammorum AΓ, ΓZ componi ex rationibus parallelogrammi ΔΓ ad ΓΘ, & hujus ad

(27) *Rob. Simſon* Euclideæ deductioni eam, quam ex demonſtratione VI, 23tiæ conſequi §. 213. notavimus, ad normam demonſtrationis *Dat.* 8væ (ſuæ 9.) compoſitam, ſubſtituit.

ad ΓZ (§. 201. n°. 1.), quæ eædem ſint rationibus laterum ipſorum BΓ : ΓH, ΔΓ : ΓE (VI, 1.); itaque etiam dici ex his componi (§. 201. n°. 2.). Conf. *Clavius* p. 598; *Rob. Simſon* p. 376. *Matth.* p. 87.

§. 217.

Quodſi deſideratur, ut ratio parallelogrammorum AΓ, ΓZ ſeu compoſita ex rationibus laterum eorum, exhibeatur per rationem, quam ipſum prioris latus alterutrum BΓ habeat ad aliquam rectam datam; hæc erit quarta proportionalis duobus reliquis parallelogrammorum lateribus ΔΓ, ΓE, & lateri ΓH poſteriois ΓZ, quod reſpondet lateri BΓ prioris AΓ.

Facta enim (VI, 12.) $\Delta\Gamma : \Gamma E = \Gamma H : I$;

erunt parallelogr. $A\Gamma : \Gamma\Theta = B\Gamma : \Gamma H$ (VI, 1.)

$\Gamma\Theta : \Gamma Z = \Delta\Gamma : \Gamma E$ (VI, 1.) $= \Gamma H : I$ (V, 11.)

proinde $A\Gamma : \Gamma Z = B\Gamma : I$ (V, 22.)

§. 218.

Si ab recta ΓB (producta, quando opus eſt) abſcinditur $\Gamma N = I$ (quod juxta §. 23. 119. ſq. immediate fit, diagonali ΔH parallelam EN agendo per punctum E; ac per N ducitur rectæ ΔΓ parallela: fit parallelogrammum $\Gamma O = \Gamma Z$ (VI, 14.);

& hinc $A\Gamma : \Gamma Z = A\Gamma : \Gamma O$ (V, 7.) $= B\Gamma : \left\{\begin{matrix}\Gamma N \\ I\end{matrix}\right.$ (VI, 1.).

§. 219.

Quare ſic etiam poteſt Propoſitio VI, 23. enunciari: Si parallelogramma AΓ, ΓZ ſint æquiangula; fiatque ut unum latus ΔΓ prioris ad unum ΓE poſterioris, ſic hujus alterum latus ΓH ad rectam I: erit parallelogrammum AΓ ad ΓZ, ut alterum latus BΓ prioris ad hanc rectam I.

§. 220.

Unde, data ratione parallelogrammi AΓ ad ΓZ datur ratio lateris BΓ prioris ad rectam I; eſtque ut unum latus ΔΓ prioris parallelogram-

logrammi AΓ ad unum latus ΓE posterioris ΓZ. sic hujus alterum latus ΓH ad hanc rectam I, ad quam alterum parallelogrammi prioris AΓ latus BΓ habet datam rationem mutuam parallelogrammorum AΓ, ΓZ.

Quæ est *Dator.* Propositio 56. (apud *Rob. Simson* & *Schwab*, pars prior 63tiæ): Εαν δυο ισογωνια παραλληλογραμμα προς αλληλα λογον εχει δεδομενον· εστιν ως η τε πρωτε πλευρα προς την τε δευτερε πλευραν, ουτως η λοιπη δευτερε πλευρα προς ην η ετερα τε πρωτε πλευρα λογον εχει δεδομενον, ον το παραλληλογραμμον εχει προς παραλληλογραμμον; & analoge cum *Dat.* 70. (§. 215.) sic demonstratur (*Fig.* 89.): Ab producto latere *AB* parallelogrammi *AC*, cujus angulus *ABC*=*E*, abscindatur *BG* quarta proportionalis alteri ejus lateri *BC* & lateribus *EF*, *DE* parallelogrammi *DF*; ac finiatur parallelogrammum *CBGH*. Erit hoc = *DF* (VI, 14.); & *AB*:*BG* = *AC*:*BH* (VI, 1.) = *AC*:*DF* (V, 7. 11.). Lateribus igitur *BC*, *EF*, *DE* quarta proportionalis *BG* ea est, ad quam *AB* habet rationem datam parallelogrammi *AC* ad *DF*.

§. 221.

Propositio VI, 23. juxta demonstrationem ejus Euclideam sic quoque potest efferri: Si duo parallelogramma sunt æquiangula; atque ut unum latus prioris ad unum posterioris, sic recta quæpiam assumta fit ad secundam; & uti alterum latus prioris ad alterum posterioris, sic secunda illa recta fit ad tertiam: prius parallelogrammum est ad posterius, ut recta primitus assumta ad hanc tertiam (*Rob. Simson* p. 375. *Matth.* p. 86.).

§. 222.

Denominatione *rationis compositæ* adhibita in compendium redigi enunciata VI, 23tiæ similiumque propositionum, præsertim si plures quam duæ rationes considerandæ occurrant, sponte ita apparet. Omnem tamen ejus vim unice hoc usu terminare, quod *Rob. Simson* velle videri possit (28), observatis §. 195. sqq. 203. sqq. §. 212. sqq. haud est consentaneum. Conf. *Viviani* p. 13. *Hindenburg* p. 317.

§. 223.

(28) Afferens (p. 375. *Matth.* p. 86.) "Nullus, quantum scio, proprium

 usum

§. 223.

Quippe ratio, quæ ex aliis componi dicitur, eo ipſo ab his pendere, per eas determinari indicatur; ſic ut ex his cognitis juxta normam quandam conſtantem colligi atque inferri poſſit. Has porro & omnes, & ſimpliciſſimas deſignari ſupponitur, quas indoles magnitudinum, de quarum ratione ex iis componenda præcipitur, requirit; vel quas datorum problematis, cui enodando earum compoſitio adhibetur, conditio ſuggerit.

§. 224.

Sicut rationis ignotæ inveſtigatio compoſitione ejus ex rationibus ſcopo congruis dirigitur; &, quando hæ liquent, abſolvitur: ita viciſſim indagatio rationis, quam unam eſſe conſtat earum, ex quibus ratio data componitur, ad determinandam alteram alterasve hanc componentes reducitur; quo facto illa *diviſione*, quam vocant, *datæ rationis compoſitæ* per notam componentem alteram vel ex alteris compoſitam innoteſcit.

§. 225.

Reductionem diviſionis hujus ad compoſitionem docet *Pappi* Propoſitio 171. Lib. VII. *Collect. math.* ſeu Lemma 5. in Lib. I. *Conicor. Apollonii*: quo, ſi A ſit ad B in ratione compoſita ex rationibus $C:D$, $E:F$; viciſſim rationem $C:D$ ex rationibus $A:B$, ac $F:E$, ſeu inverſa ipſius $E:F$, componi oſtendit.

Facto enim $E:F=D:H$; erit (§. 201.) ratio, quæ ex rationibus $C:D$, $E:F$ componitur, h. e. (ſupp.) $A:B=C:H$. Quare cum ita

uſum rationis compoſitæ hactenus oſtendit, vel propter quam cauſam in geometriam introducta fuerit; cum omnia, in quibus ſolet adhiberi ratio compoſita, poſſint etiam ſine ejusdem auxilio tum enunciari, tum demonſtrari. Uſus autem rationis compoſitæ in hoc unice conſiſtit, quod ejus ope periphraſes evitentur; & ita propoſitiones poſſint vel enunciari vel demonſtrari brevius, vel utrumque fieri poſſit." Ceterum eodem fere redit, quod *Galilei* p. 138. 142. ſq., *Saccherius* p. 137. 139. monent.

ita ſint $C:H=A:B$
$H:D=F:E$

eſt (§. 201. & Not. 21.) $C:D=\left(\begin{matrix}A:B\\F:E\end{matrix}\right)$ (29)

Eodemque modo, ex quotcunque rationibus $C:D$, $E:F$, $G:H$ &c. componatur ratio $A:B$; cæteris $E:F$, $G:H$ &c. ad unam $P:Q$ ex iis compoſitam reductis, demonſtratur: rationem $C:D$ componi ex rationibus $A:B$ & $Q:P$; ſeu C eſſe ad D in ratione compoſita ex directa A ad B & inverſa rationis P ad Q.

§. 226.

Hinc per §. 208. ſq. & V, 4. Cor. eædem etiam inter ſe ſunt rationes, quæ rationibus iisdem inter ſe $A:B$, $C:D$ per alias $E:F$, $G:H$ pariter inter ſe easdem diviſis obtinentur.

Quippe, ob $E:F=G:H$ (ſupp.), etiam eſt $F:E=H:G$ (V, 4. Cor.) Quare cum (ſupp.) quoque ſit $A:B=C:D$:
ratio ex $A:B$ ac $F:E$ compoſita eadem eſt rationi compoſitæ ex $C:D$ &

(29) *Euclides Dator.* Propoſitionem 68. (apud *Rob. Simſon* & *Schwab* 65.): Εαν, δυο ισογωνια παραλληλογραμμα λογον εχει δεδομενον, και μια πλευρα προς μιαν πλευραν λογον εχει δεδομενον· και λοιπη πλευρα προς την λοιπην πλευραν λογον εξει δεδομενον, pariter ac 70mam (§. 215.), cujus converſam ſiſtit, eadem adhibita conſtructione, redigit ad *Dat.* 8vam (§. 214.). Quippe cum, iisdem, quæ §. 215. (*Fig.* 89.) factis, ſint parallelogr. $AC:DF=AB:BG$, & $BC:EF=DE:BG$ (§. 215.); datis parallelogrammorum $AC:DF$, laterumque $BC:EF$ rationibus, dantur laterum AB, DE rationes ad eandem rectam BG; ideoque etiam (*Dat.* 8.) ratio $AB:DE$. Cui inveniendæ ſi modus in *Dat.* 8vâ (§. 214.) præſcriptus applicatur; reſultat, quod *Pappi* Propoſitio dicit: nempe ob $AB:BG=AC:DF$
& $BG:DE=EF:BC$,
eſt $AB:DE=\left(\begin{matrix}AC:DF\\EF:BC\end{matrix}\right)$
Simſon in demonſtratione ſuæ 65tæ rectam BG tantum juxta ſuam 63. (§. 220.) ducit, & ex hac 63. argumentatur,

& $H : G$ (§. 209); h. e. (§. 225.) quæ rationem $A : B$ per alteram $E : F$ dividendo prodit, ratio eadem eſt rationi diviſione rationis $C : D$ per alteram $G : H$ oriundæ.

§. 227.

Idem in Propoſitionibus *H*, *K*, *Elementor.* Libro V. annexis (p. 170. ſqq.; in verſione *Matthiæ*, ubi vero deeſt Propoſ. *K*, p. 75. ſq.) *Rob. Simſon* uberius ſic enunciat: "Si ratio ex quibusdam rationibus" [ſive ſtrictiori, ſive latiori, §. 201. expoſito ſenſu] "compoſita eadem ſit rationi ex quibusdam aliis rationibus compoſitæ; fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus compoſita, eadem uni rationi ex poſterioribus, vel rationi ex quibusdam ex poſterioribus compoſitæ: erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus compoſita, eadem rationi reliquæ ex poſterioribus, vel rationi ex reliquis poſterioribus compoſitæ."

§. 228.

Uti parallelogramma æquiangula AΓ, ΓZ (*Fig.* 85. ſq.) ope tertii ΓΘ in ratione compoſita ex rationibus BΓ : ΓH, ΔΓ : ΓE eſſe in demonſtratione VI, 23tiæ oſtenduntur; ſic eadem (quod enunciato Propoſitionis comprehenditur) etiam eſſe in ratione compoſita ex rationibus ΔΓ : ΓE, BΓ : ΓH, ſubſidio tertii parallelogrammi ΓΣ efficitur.

Et generatim, quando $A : B = \binom{C : D}{E : F}$;

igitur, factis $\begin{matrix} C : D = K : L, \\ E : F = L : M \end{matrix}$ eſt $A : B = \binom{K : L}{L : M} = K : M$ (V, 22.):

ob $K : M$ quoque $= \binom{L : M}{K : L}$ (V, 23.) $= \binom{E : F}{C : D}$;

pariter eſt $A : B = \binom{E : F}{C : D}$.

Similiterque rationem ex pluribus quam duabus compoſitam, mutato harum ordine, haud mutari oſtenditur.

§. 229.

Inverſe parallelogr. ZΓ eſſe : $\Gamma A = \binom{E\Gamma : \Gamma\Delta}{H\Gamma : \Gamma B}$ vel $= \binom{H\Gamma : \Gamma B}{E\Gamma : \Gamma\Delta}$,

ope

ope tertii parallelogrammi $\Gamma\Theta$ vel $\Gamma\Sigma$, eodem modo, quo rationis directæ $A\Gamma : \Gamma Z$ compositio, demonstratur.

Pariterque generatim, quando $A:B = \binom{C:D}{E:F} = \binom{K:L}{L:M} = K:M$;

est $B:A = M:K$ (V, 4. Cor.) $= \binom{L:K}{M:L}$ (V, 23.) $= \binom{D:C}{F:E}$ (V, 4. Cor.).

Quod rursus similiter ad rationem ex pluribus quam duabus compositam extenditur.

§. 230.

Si A, B, C, D sunt magnitudines homogeneæ; est $\binom{A:B}{C:D} = \binom{A:D}{C:B}$.

Factis enim $A:B = K:L$ $\quad A:D = K:O$
$C:D = L:M$; $\quad C:B = O:P$

ut sint $\binom{A:B}{C:D} = K:M$ $\quad \binom{A:D}{C:B} = K:P$ (§. 201.);

ob
$$A:B = K:L$$
$$B:C = P:O$$
$$C:D = L:M$$

est (§. 201.) $A:D$ seu (constr.) $K:O = \binom{K:L}{P:O}{L:M}$

Unde (§. 225.) $\binom{K:O}{O:P} = \binom{K:L}{L:M}$

h. e. (V, 22.) $K:P = K:M$; ideoque $\binom{A:B}{C:D} = \binom{A:D}{C:B}$.

§. 231.

Si $A:B = \binom{C:D}{E:F}{G:H}$, atque $E:F = D:I$; est $A:B = \binom{C:I}{G:H}$.

Facto enim $G:H = I:K$; fit

$A:B = \binom{C:D}{D:I}{I:K}$ (§. 209.) $= C:K$ (§. 201.) $= \binom{C:I}{I:K}$ (§. 201.) $= \binom{C:I}{G:H}$ (§. 209.).

§. 232.

Sit A ad B in ratione composita ex rationibus $E:F$ & $G:H$; atque

atque $B:C = I:K$: erit A ad C in ratione composita ex rationibus $E:F$, $G:H$, $I:K$.

Factis enim $P:Q = E:F$, $Q:R = G:H$, $R:S = I:K$ unde $P:R = \binom{E:F}{G:H}$: $P:S = \binom{E:F}{G:H}{I:K}$

erunt $A:B = P:R$ (§. 210.)

$B:C = P:S$ (V, 11.)

$A:C = P:S$ (V, 22.) $= \binom{E:F}{G:H}{I:K}$.

Idemque similiter & ad plures magnitudines A, B, C, D, &c., & ad rationes ipsarum rationibus mutuis æquipollentes simplices compositasve quaslibet, extenditur.

§. 233.

Si $A:B = \binom{C:D}{E:F}$; & A, B, C, D, E, F sunt magnitudines homogeneæ: ob $B:C = B:C$, $B:E = B:E$

fiunt $A:C = \binom{C:D}{E:F}{B:C}$ §.232. $= \binom{B:C}{C:D}{E:F}$ §.228. $= \binom{B:D}{E:F}$ §.231.

$A:E = \binom{C:D}{E:F}{B:E}$ $= \binom{C:D}{B:E}{E:F}$ $= \binom{C:D}{B:F}$ $= \binom{B:D}{e:F}$ §.230.

(*Castillion Sur une nouvelle proprieté des sections coniques*, in *Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin. Année* 1776. p. 298.). Ceteræ, quæ ibidem ex $A:B = \binom{C:D}{E:F}$ deducuntur rationes, ex §. 225. 229. 230. & nunc §. 233. ostensis consequuntur.

§. 234.

Ratio composita ex ejusdem rationis directa & inversa est ratio æqualitatis, seu æqualium.

Quippe si $A:B = E:F$

& $B:C = F:E$

fit $A:C = E:E$ (V, 22.)

proinde $A = C$ (*Simson Elem.* V. Prop. A. p. 142. *Matth.* p. 48.).

§. 235.